



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

ÁREA ÁLGEBRA

Lic. Silvia Báez Chávez

MATERIAL DE APOYO

GEOMETRÍA ANALÍTICA Y VECTORES I

Objetivo General:

- Proporcionar al alumno un marco teórico, no solo como un conjunto de teoremas y propiedades, sino como fundamento que justifica la práctica y que muestra como conceptos que, en principio parecen ser independientes, unos de otros terminan entrelazándose.

Objetivos Específicos:

- Encontrar las diferentes ecuaciones de rectas ubicadas en el plano y representarlas gráficamente.
- Investigar la posición relativa de rectas en el plano.
- Identificar una magnitud vectorial.
- Sumar y restar, analíticamente y gráficamente vectores de R^2
- Multiplicar, analíticamente y gráficamente un vector de R^2 por un escalar.
- Utilizar las propiedades de las operaciones entre vectores de R^2 en situaciones planteadas.

Bibliografía:

- H. Lehmann Charles, Geometría Analítica
- Lipschutz Seymour, Álgebra Lineal. Capítulo 2, págs:45-86
- Kozak Ana María, Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal, Capítulo 1-2, págs1-153

Lic. Silvia Báez Chávez



Recta

La Línea Recta

Existen varias definiciones de la línea recta, una de ellas y quizás la más utilizada es aquella que expresa que “ **una recta es la distancia más corta entre dos puntos**”

No obstante los tratados superiores de Geometría, admiten la existencia de la línea recta como un postulado, de donde se obtiene que:

“ **Una línea recta es el lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente resulta siempre constante**”.

Pendiente de una Recta.

La pendiente de una recta no vertical, es la tangente de su ángulo de inclinación.

En símbolos $m = \operatorname{tg} \theta$

m : pendiente

θ : ángulo de inclinación

➤ ¿ Qué se entiende por ángulo de inclinación?

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo formado entre el eje de abscisas en sentido positivo y la recta.

θ : ángulo de inclinación $0 \leq \theta \leq \pi$

➤ ¿ Qué ocurre con la pendiente cuando θ varía de 0 a π ?

Definimos $m = \operatorname{tg} \theta$

- Si θ es agudo, $m = \operatorname{tg} \theta > 0$ se dice que la recta tiene pendiente positiva.
- Si θ es obtuso, $m = \operatorname{tg} \theta < 0$ se dice que la recta tiene pendiente negativa.
- Si $\theta = 0$, $m = \operatorname{tg} \theta = 0$ se dice que no tiene pendiente.
- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, se dice que $m = \operatorname{tg} \theta$ no está definida.

➤ ¿ Cómo hallamos la pendiente de una recta, si no conocemos el ángulo de inclinación de la misma?

Si conocemos dos puntos cualesquiera y diferentes de una recta no vertical, sean $P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2)$, la pendiente de la recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Obs: La fórmula anterior para calcular la pendiente de una recta, no está definida analíticamente cuando $x_2 = x_1$

A partir de lo anterior surge lo siguiente:

La recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1); P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad x_1 \neq x_2$$

Relacionando la ecuación anterior con la definición de pendiente de una recta $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obtenemos la ecuación de la recta denominada **Punto - Pendiente**.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si su abscisa está en el origen, resulta la ecuación:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

b : intersección con el eje "y"

Las condiciones: La Pendiente de una recta y un punto perteneciente a ella, son condiciones suficientes para obtener la ecuación de una recta.

Otras formas de la Ecuación de una Recta

• **Ecuación simétrica de la recta**

Dados $a \neq 0, b \neq 0$, las intersecciones de la recta con el eje x e y , se tiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

• **Forma General de la Ecuación de una Recta**

La ecuación general de una recta está dada de la forma lineal:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{donde } A, B \text{ no deben ser simultáneamente nulos}$$

C puede o no ser igual a cero.

Casos particulares de la ecuación general de una recta

Dado $r: Ax + By + C = 0$ que representa la ecuación implícita o general de una recta en R^2 , se pueden presentar los siguientes casos:

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

- Si $A=0 \rightarrow By+C=0$ obtenemos una recta paralela al eje de abscisas.
Si además $C=0 \rightarrow By=0$, obtenemos la ecuación del eje de abscisas. Ambas rectas son rectas horizontales.
- Si $B=0 \rightarrow Ax+C=0$, obtenemos una recta paralela al eje de ordenadas, en particular si $C=0$ obtenemos la ecuación del eje de ordenadas. Ambas rectas son rectas verticales.
- Si $C=0 \rightarrow Ax+By=0$, siendo $A \neq 0 \wedge B \neq 0$ obtenemos una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplos

$$r: y-3$$

$$r: x-2y=0$$

$$r: 2x+1=0$$

Recta paralela al eje de abscisas

Recta paralela al eje de ordenadas

Recta que pasa por el origen de coordenadas

Observaciones sobre la ecuación segmentaria o simétrica de una recta.

➤ ¿ Porqué expresar una recta en forma segmentaria y no trabajar directamente con su ecuación general?

La ventaja que ofrece la forma segmentaria es la de poder realizar su gráfica casi sin efectuar cálculos, ya que los números a y b

representados en la forma segmentaria $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, definen la abscisa

y la ordenada respectivamente, de los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados.

➤ ¿ Porqué no es la forma más utilizada?

Una respuesta sencilla es la de considerar el caso de una recta que pasa por el origen de coordenadas y la posibilidad de poder expresarla en la forma segmentaria.

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Posiciones relativas de dos rectas.

Si consideramos las ecuaciones de dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ se tienen las condiciones necesarias y suficientes para establecer:

a) **Paralelismo:** Las rectas dadas se dicen que son paralelas si

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$$

b) **Perpendicularidad:** Las rectas dadas se dicen que son perpendiculares si, $AA_1 + BB_1 = 0$

c) **Coincidencia:** Las rectas dadas se dicen que son coincidentes

EJERCICIOS RESUELTOS

1- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y tiene pendiente 3.

Solución

Considerando los datos que tenemos resulta adecuada la utilización de la ecuación punto - pendiente de una recta.

$$P(3,2); m = 3$$

$$\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Reemplazando...

$$y - 2 = 3(x - 3)$$

$$y - 2 = 3x - 9$$

$$\boxed{3x - y - 7 = 0} \quad \text{Ec. general de la}$$

recta pedida

Representación gráfica

Para realizar el gráfico correspondiente podemos utilizar la forma segmentaria de la recta para obtener otro punto perteneciente a la recta.

$$3x - y = 7$$

$$\frac{3}{7}x - \frac{y}{7} = 1$$

$$\frac{x}{7/3} + \frac{y}{-7} = 1$$

$$\rightarrow P_1(7/3, 0) ; P_2(0, -7)$$

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

- 2- Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45° .

Solución

A tener el ángulo de inclinación podemos obtener la pendiente utilizando la fórmula:

$$m = \operatorname{tg} \theta \quad \rightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ \quad m = 1$$

Utilizando la ecuación punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad A(-6,-3)$$

$$y + 3 = 1(x + 6)$$

$$x + 6 - y - 3 = 0$$

$$\boxed{x - y + 3 = 0} \text{ Ec. Pedida}$$

Representación gráfica

Expresando en su forma segmentaria.

$$x - y + 3 = 0 \quad \rightarrow x - y = -3$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$$

$$P_1(-3,0) \text{ y } P_2(0,3)$$

- 3- Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X e Y son 2 y -3 respectivamente. Hallar la ecuación de dicha recta.

Solución

Los valores 2 y -3 representan las intersecciones de la recta con los ejes de abscisas y de ordenadas respectivamente, por lo que contamos con dos puntos $P_1(2,0)$ y $P_2(0,-3)$ que pertenecen a la recta.

Resulta conveniente utilizar la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-3 - 0}{0 - 2} (x - 2)$$

$$-2y = -3(x - 2)$$

$$-2y = -3x + 6$$

$$\boxed{3x - 2y - 6 = 0}$$

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Representación gráfica

A tener dos puntos que pertenecen a la recta directamente ubicamos los puntos en el plano coordenado y trazamos la recta pedida.

4- Dado el triángulo de vértices $A(-2,1); B(4,7); C(6,-3)$. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto BC.

Solución

La recta pedida tiene la misma pendiente que la que pasa por los puntos B y C.

Calculando la pendiente de la recta que pasa por B y C tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-3 - 7}{6 - 4} = \frac{-10}{2} = -5$$

Para hallar la ecuación de la recta utilizamos la que pasa por un punto y tiene pendiente conocida.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -5(x + 2)$$

$$y - 1 = -5x - 10$$

$$\boxed{5x + y + 9 = 0}$$

Representación gráfica

Ubicamos los puntos dados y trazamos el triángulo y la recta pedida.

Vectores

En diversas situaciones de nuestra vida observamos un gran número de sucesos, por ejemplo en varias aplicaciones físicas aparecen ciertas cantidades, tales como temperatura y rapidez (módulo de la velocidad) que poseen solo “magnitud”. Estas pueden representarse por números reales y se denominan escalares. Por otra parte, también existen cantidades, tales como la fuerza y velocidad, que poseen tanto “magnitud” como “dirección”. Estas pueden representarse por flechas(que tienen longitudes y direcciones apropiadas y parten de algún punto de referencia dado, O) y se denominan vectores geométricos.

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Una definición más precisa de Vector sería la siguiente:

Un segmento de recta queda determinado por sus puntos extremos, cuando estos puntos están dados en cierto orden se dice que el segmento está orientado y a este segmento orientado se le denomina vector.

Consideremos una recta "r" y dos puntos P y Q. Si tomamos al punto P como origen y al punto Q como el extremo, obtenemos un segmento orientado, entonces queda definido el vector \vec{PQ} .

Representación gráfica de un vector:

P: punto origen

Q: punto extremo

"Todo segmento tiene una longitud", ¿ entonces un vector se puede medir?

La longitud desde el origen P hasta el extremo Q se denomina módulo del vector, y se simboliza como $\|\vec{PQ}\|$

Desde el punto de vista geométrico, el módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que define al vector.

Desde el punto de vista físico, el módulo del vector es la propia intensidad o magnitud del vector.

Operaciones entre vectores

Suma de vectores.

El vector resultante $\vec{u} + \vec{v}$, suma de \vec{u} y \vec{v} se obtiene aplicando la llamada Regla del Paralelogramo.

➤ ¿ En que consiste la Regla del Paralelogramo?

Tomamos un punto **O** que represente el origen de un vector \vec{u} y un vector \vec{v} .

Trazamos una recta paralela a la dirección del vector \vec{v} en el extremo del vector \vec{u} , y en el extremo del vector \vec{u} trazamos una recta paralela a la dirección del vector \vec{v} .

Lic. Silvia Báez Chávez



Lic. Silvia Báez Chávez

Ambas rectas se cortan en un punto formando la figura de un paralelogramo.

Geométricamente, el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector que resulta uniendo el punto de origen de los vectores con el punto de intersección de las rectas trazadas en forma paralela a dichos vectores.

Propiedades de la suma de vectores

Los vectores cumplen con ciertas propiedades tales como:

- Ley de composición interna:** la suma de dos vectores es un vector, $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
- Propiedad conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Propiedad asociativa:** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Elemento neutro:** $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}$; $\vec{0}$ vector nulo.
- Elemento opuesto:** para todo vector \vec{u} existe un vector opuesto $(-\vec{u})$ tal que $(\vec{u}) + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

Representación del vector nulo y el vector opuesto

- **Vector nulo:** El vector $\vec{0}$ denominado nulo, se representa como el vector cuyo punto de origen y punto de extremo coinciden.

El módulo del vector nulo es cero $\|\vec{0}\| = 0$

P: punto de origen

Q: punto extremo

- **Vector opuesto:** EL vector $-\vec{u}$ denominado vector opuesto del vector \vec{u} es aquel que tiene la misma dirección e igual módulo que el vector \vec{u} , pero sentido opuesto.

Producto de un escalar por un vector.

Dado un vector \vec{u} y un número real k , el producto $k\vec{u}$ es un vector que se obtiene multiplicando la magnitud de \vec{u} por k y manteniéndose la misma dirección si $k \geq 0$, o la dirección opuesta si $k < 0$.

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Módulo de un Vector:

El módulo del vector $k\vec{u}$ es $\left|k\vec{u}\right| = |k|\left|\vec{u}\right|$ donde:

$$\left|k\vec{u}\right| < \left|\vec{u}\right| \text{ si } |k| < 1$$

$$\left|k\vec{u}\right| > \left|\vec{u}\right| \text{ si } |k| > 1$$

$$\left|k\vec{u}\right| = \left|\vec{u}\right| \text{ si } k = 1 \vee k = -1$$

Propiedades del producto de un vector por un escalar.

a) Ley de composición externa: el producto de un vector por un escalar es un vector $k\vec{u} = \vec{v}$

b) Asociatividad mixta: $k_1(k_2\vec{u}) = (k_1k_2)\vec{u} = k_2(k_1\vec{u})$

c) Propiedad distributiva del producto de un vector por un escalar con respecto a la suma de vectores.

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

d) Propiedad distributiva del producto de un vector por un escalar con respecto a la suma de escalares

$$(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$$

e) El escalar 1 es el elemento neutro para el producto de un vector

$$1.\vec{u} = \vec{u}$$

Vectores en el espacio bidimensional

Todo punto $P(x, y) \in R^3$ tiene asociado un vector posición $\vec{P} = OP$, cuyo origen es el origen de coordenadas O y cuyo extremo es el punto P.

La expresión canónica del punto A(2,-3) es $\vec{a} = 0\vec{A} = 2i - 3j$

En forma gráfica

Obs: Todo punto del plano tiene asociado un vector posición, y todo vector \vec{p} es el vector posición de un único punto $P(x, y)$.

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

Producto escalar, ángulo entre vectores y proyecciones

En el contexto del álgebra vectorial, la operación de producto escalar constituye una herramienta para obtener la medida del ángulo que definen dos vectores distintos del vector nulo, considerados con un origen común, y efectuar proyecciones ortogonales.

En el contexto de la geometría constituye una herramienta muy útil para describir analíticamente ecuaciones de rectas y planos.

Ángulo entre vectores

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} se denomina ángulo entre dichos vectores, al ángulo que determinan las direcciones de los vectores \vec{u} y \vec{v} , cuando son considerados con un origen común que satisfacen la relación $0 \leq \theta \leq \pi$

En particular:

- **Si los vectores son paralelos:** el ángulo es 0
- **Si los vectores son perpendiculares:** el ángulo es $\pi/2$ y se denominan ortogonales.
- **Si algunos de los vectores es el vector nulo:** el ángulo no está definido.

Considerando lo anterior, podemos definir el producto escalar entre los vectores \vec{u} y \vec{v} como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta; & \text{si } \vec{u} \neq 0 \wedge \vec{v} \neq 0 \\ 0, & \text{si } \vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Proyecciones:

Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} , con $\vec{u} \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$, y θ el ángulo formado por ellos. Si \vec{w} representa la proyección de \vec{u} sobre \vec{v} , entonces:

Lic. Silvia Báez Chávez



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Silvia Báez Chávez

$$\vec{w} = \text{Proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Según sea θ un ángulo agudo u obtuso, hay dos situaciones posibles.

Ejercicios resueltos

1- Determinar la incógnita en cada caso.

a) El módulo del vector \vec{u} si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12, |\vec{v}| = 2, \text{ y } \theta = \pi/6$

b) El ángulo θ entre los vectores \vec{u} y \vec{v} si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}, |\vec{v}| = \sqrt{2}, \text{ y } |\vec{u}| = \sqrt{3}$

Solución

a) Utilizando la fórmula del producto escalar cuando \vec{u} y \vec{v} son distintos de cero tenemos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

$$12 = |\vec{u}| \cdot 2 \cdot \cos \pi/6$$

$$12 = |\vec{u}| \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow 12 = |\vec{u}| \cdot \sqrt{3} \quad \rightarrow |\vec{u}| = \frac{12\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow |\vec{u}| = 4.$$

$\sqrt{3}$

b) Utilizando la fórmula del producto escalar cuando \vec{u} y \vec{v} son distintos de cero tenemos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cos \theta \quad \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lic. Silvia Báez Chávez



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

ÁREA ÁLGEBRA

Lic. Maximo Aquino

MATERIAL DE APOYO

EL ALGEBRA NUMÉRICA

Números Naturales.

Historia

Antes de que surgieran los números el ser humano se las ingenió para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas, o simplemente los dedos. Más adelante comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena. Pero fue en Mesopotamia alrededor del año 4.000 a. C. donde aparecen los primeros vestigios de los números que consistieron en grabados de señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla empleando para ello un palito aguzado. De aquí el nombre de escritura cuneiforme. Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la Grecia Antigua y en la Antigua Roma. En la Grecia antigua se empleaban simplemente las letras de su alfabeto, mientras que en la antigua Roma además de las letras, se utilizaron algunos símbolos.

Quien colocó al conjunto de los números naturales sobre lo que comenzaba a ser una base sólida, fue Dedekind. Este los derivó de una serie de postulados (lo que implicaba que la existencia del conjunto de números naturales se daba por cierta), que después precisó Peano dentro de una lógica de segundo orden, resultando así los famosos cinco postulados que llevan su nombre. Frege fue superior a ambos, demostrando la existencia del sistema de números naturales partiendo de principios más fuertes. Lamentablemente la teoría de Frege perdió, por así decirlo, su credibilidad y hubo que buscar un nuevo método. Fue Zermelo quien demostró la existencia del conjunto de números naturales,

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

dentro de su teoría de conjuntos y principalmente mediante el uso del axioma de infinitud que, con una modificación de este hecha por Adolf Fraenkel, permite construir el conjunto de números naturales como ordinales según von Neumann.

Definición. Un número natural es cualquiera de los números: 0, 1, 2, 3... o el mismo conjunto excluyendo el 0 según que autores se consulten, que se pueden usar para contar los elementos de un conjunto.

Estos números reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar y ordenar los objetos de la naturaleza.

El número natural, es el que sirve para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto, y se llama cardinal de dicho conjunto. Los números naturales son infinitos. El conjunto de todos ellos se designa por N .

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12, \dots\}$$

El cero, a veces, se excluye del conjunto de los números naturales.

Además de cardinales (para contar), los números naturales son ordinales, pues sirven para ordenar los elementos de un conjunto:

1° (primero), 2° (segundo),..., (3°) tercero,.....

Entre los números naturales están definidas las operaciones adición y multiplicación. Además, el resultado de sumar o de multiplicar dos números naturales es también un número natural, por lo que se dice que son operaciones internas.

La sustracción, sin embargo, no es una operación interna en N , pues la diferencia de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el sustraendo es mayor que el minuendo). Por eso se crea el conjunto Z de los números enteros, en el que se puede restar un número de otro, cualesquiera que sean éstos.

La división tampoco es una operación interna en N , pues el cociente de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el dividendo no es múltiplo del divisor).

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Por eso se crea el conjunto Q de los números racionales, en el que se puede dividir cualquier número por otro (salvo por el cero). La división entera es un tipo de división peculiar de los números naturales en la que además de un cociente se obtiene un resto.

Propiedades de la Adición de Números Naturales

La adición de números naturales cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y la aditiva de la igualdad.

1.- Asociativa:

Si a, b, c son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2.-Conmutativa

Si a, b son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$a + b = b + a$$

Gracias a las propiedades asociativa y conmutativa de la adición se pueden efectuar largas sumas de números naturales sin utilizar paréntesis y sin tener en cuenta el orden.

3.- Elemento neutro

El 0 es el elemento neutro de la suma de enteros porque, cualquiera que sea el número natural a , se cumple que:

$$a + 0 = a$$

4- Propiedad aditiva de la igualdad

Cualquiera sea el natural p , si $a = b$, entonces $a + p = b + p$. Si sumamos ambos miembros de una igualdad un mismo número, obtenemos otra igualdad.

Propiedades de la Multiplicación de Números Naturales

La multiplicación de números naturales cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro, distributivo del producto respecto de la suma y la multiplicativa de la igualdad.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

1.-Asociativa

Si a, b, c son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2.- Conmutativa

Si a, b son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3.-Elemento neutro

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque, cualquiera que sea el número natural a, se cumple que:

$$a \cdot 1 = a$$

4.- Distributiva del producto respecto de la suma

Si a, b, c son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

5- Multiplicativa de la igualdad

Cualquiera sea el número natural p, si $a = b$, entonces $ap = bp$. Esta propiedad suele enunciarse así: si multiplicamos ambos miembros de una igualdad por un mismo número la igualdad no varía.

Además de las propiedades citadas, tenemos que si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$, es decir, si el producto de dos números es 0, uno de ellos es 0. La propiedad distributiva establece una conexión entre la adición y la multiplicación.

Propiedades de la Sustracción de Números Naturales

Igual que la suma la resta es una operación que se deriva de la operación de contar.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Los términos de la resta se llaman minuendo y sustraendo.

Propiedades de la resta:

1- La resta no tiene la propiedad conmutativa (no es lo mismo $a - b$ que $b - a$)

2- La resta no es asociativa, no es lo mismo $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

Propiedades de la división

La división no tiene la propiedad conmutativa. No es lo mismo a/b que b/a .

Números Enteros

Historia

Los números históricos encontraron por primera vez una aplicación en los balances contables. A veces cuando la cantidad adeudada o pasivo, superaba a la cantidad poseída o activo, se decía que el banquero estaba en "números rojos". Esta expresión venía del hecho que lo que hoy llamamos números negativos se representaban escritos en tinta roja así: "30" podía representar un balance positivo de 30 sueldos, mientras que "3" escrito con tinta roja podía representar, 3 sueldos, es decir, una deuda neta de 3 sueldos. El nombre de enteros se justifica porque estos números ya positivos o negativos, siempre representaban idealmente una cantidad de unidades no divididas (debidadas o poseídas pero siempre cantidades indivisibles).

Tal vez por el hecho de que los números negativos podían ser representados como naturales, aunque escritos con tinta de color diferente, históricamente fueron rechazados como entidades "no existentes" realmente, sino sólo como artificios contables. No fue sino hasta el siglo XVII que tuvieron aceptación en trabajos científicos europeos, aunque matemáticos italianos del renacimiento como Tartaglia y Cardano los hubiesen ya advertido en sus trabajos acerca de solución de ecuaciones de tercer grado. Sin embargo, la regla de los signos ya era conocida previamente por los matemáticos de la India.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Definición: Los **números enteros** son una generalización del conjunto de números naturales que incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto de enteros negativos que son los opuestos de los naturales (éstos pueden ser interpretados como el resultado de restar a 0 un número natural).

Definición: Un entero es un número real que es o un número natural, ó cero, ó el negativo de un número natural. Designamos por Z al conjunto de los enteros y escribimos $Z = \{x/x \in N \text{ ó } x = 0 \text{ ó } x = -n \text{ para algún } N \text{ en } N\}$. Los números naturales se llaman enteros positivos y sus inversos aditivos se llaman enteros negativos. El entero 0 no se considera positivo ni negativo.

Los enteros se representan gráficamente en la recta de números enteros como puntos a un mismo espacio entre sí desde menos infinito, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,... hasta más infinito: los números enteros no tienen principio ni fin.

Los números negativos pueden aplicarse en distintos contextos, como la representación de deudas, profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, entre otros. Inicialmente el primer campo de aplicación fue la contabilidad donde los números negativos significaban deudas y los positivos haberes o activos poseídos. El hecho de que un número sea entero, significa que no tiene parte decimal. Imaginemos que disponemos de dos barras de chocolate, cada una con tres divisiones, las cuales van a repartirse entre tres personas. Es claro que esta operación puede realizarse convenientemente si a cada persona le toca una parte de las tres que tiene cada barra. Ahora bien, imaginemos que tenemos 7 balines (esferas de metal) que queremos repartir entre las mismas tres personas. Es claro que no puede partirse un balín para que a cada persona le toque la misma cantidad de balines, así que a cada uno le deben tocar dos balines y regalar uno para que la repartición sea justa, o bien conseguir otros dos balines para que a cada uno le toquen tres. Los balines ilustran así, por analogía, los números enteros: números que no pueden dividirse, a menos que la división sea exacta, por decir: $8/4$ sí es exacta: $8/4 = 2$ y es

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

un entero, pero $8/3$ no es exacta y no puede ser, en consecuencia, un número entero.

Los números enteros pueden ser considerados una extensión de los números naturales y un subconjunto de los números racionales (fracciones). Los números enteros son subconjunto de los números racionales o fracciones, puesto que cada número entero puede ser considerado como una fracción cuyo denominador es el número uno.

Los números enteros pueden ser sumados y restados, multiplicados y comparados. Si la división es exacta, también pueden dividirse dentro del mismo conjunto de los enteros. La razón principal para introducir los números negativos sobre los números naturales es la posibilidad de resolver ecuaciones del tipo: $a + x = b$ para la incógnita x .

Propiedades de la adición de los números enteros

La adición en los números enteros tienen las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa, elemento neutro, elemento opuesto y aditiva de la igualdad.

1- Propiedad asociativa

Cualquiera sean los enteros a , b y c , $(a + b) + c = a + (b + c)$
Como la adición es asociativa podemos dejar de escribir los paréntesis

2- Propiedad conmutativa

Cualesquiera sean los enteros a y b , $a + b = b + a$.
El orden de los sumandos no altera el valor de la suma.

3- Propiedad del elemento 0

El cero es el elemento neutro, es decir, cualquiera sea el entero a ,
 $a + 0 = 0 + a = a$.

4- Propiedad del elemento opuesto

Todo entero tiene su opuesto, es decir cualquiera sea el entero a , existe un único entero $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

5- Propiedad aditiva de la igualdad

Cualquiera sea el entero p , si $a = b$, entonces $a + p = b + p$.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

La existencia de opuestos permite la diferencia de dos enteros cualesquiera, definiendo la diferencia así: $a - b = a + (-b)$. Entonces podemos definir la resta así: para restar debemos sumar al minuendo el sustraendo cambiado de signo, es decir, restar significa sumar el opuesto.

Propiedades de la multiplicación de los enteros

La multiplicación en Z tiene exactamente las mismas propiedades que la multiplicación en N .

1- Propiedad asociativa

Cualesquiera sean los enteros a , b y c , $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Cómo la multiplicación es asociativa, podemos escribir simplemente $a \cdot b \cdot c$ en vez de $a \cdot (b \cdot c)$ o de $(a \cdot b) \cdot c$.

2- Propiedad conmutativa

Cualesquiera sean los enteros a y b , $a \cdot b = b \cdot a$

Esta propiedad nos muestra que el orden de los factores no altera el valor del producto.

3- Propiedad del elemento neutro

El 1 es el elemento neutro, cualesquiera sea a $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Esta propiedad nos muestra que cualquier número multiplicado por la unidad da el mismo número.

4- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Cualesquiera sean los enteros a , b y c , $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

5- Propiedad multiplicativa de la igualdad

Cualquiera sea el entero p , si $a = b$, entonces, $a \cdot p = b \cdot p$

Esta propiedad nos muestra que si multiplicamos ambos miembros de una igualdad por un mismo número obtenemos otra igualdad.

Número real

Historia

Los egipcios utilizaron por primera vez las fracciones comunes alrededor del año 1000 adC; alrededor del 500 adC el grupo de matemáticos griegos liderados por Pitágoras se dio cuenta de la

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

necesidad de los números irracionales. Los números negativos fueron inventados por matemáticos indios cerca del 600, posiblemente reinventados en China poco después, y no se utilizaron en Europa hasta el siglo XVII, si bien a finales del XVIII Leonhard Euler descartó soluciones negativas para las ecuaciones porque lo consideraba irreal. En ese siglo, en el cálculo se utilizaba un conjunto de números reales sin una definición concisa, cosa que finalmente sucedió con la definición rigurosa hecha por Georg Cantor en 1871.

En realidad, el estudio riguroso de la construcción total de los números reales exige tener amplios antecedentes de teoría de conjuntos y lógica matemática. Fue lograda la construcción y sistematización de los números reales en el siglo XIX por dos grandes matemáticos europeos utilizando vías distintas: la teoría de conjuntos de Georg Cantor (encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos), por un lado, y el análisis matemático de Richard Dedekind (vecindades, entornos y cortaduras de Dedekind). Ambos matemáticos lograron la sistematización de los números reales en la historia no de manera espontánea, sino echando mano de todos los avances previos en la materia: desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weierstrass, por mencionar sólo a los más sobresalientes.

En la actualidad, solamente los especialistas conocen con profundidad alguna o ambas teorías en relación a la construcción total de los números reales, lo cual no nos impide el trabajo con ellos.

Definición. Los números reales es el conjunto el conjunto de números que se encuentran en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta infinita (continuum): la recta numérica.

El conjunto de los números reales se le simboliza con la letra \mathbb{R} . El nombre de número real se propuso como antónimo de número imaginario.

El concepto de número real se originó cuando se constató la existencia de los números irracionales. Así, el conjunto de los

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

números reales se define como la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los irracionales.

Debido a que el conjunto de números reales contiene al conjunto de números racionales, y éste a su vez contiene a los enteros que a su vez contiene los números naturales, se sugiere que el conjunto de los números reales contiene también a los números enteros y a los números naturales. Asimismo, el conjunto de números reales contiene al de los números irracionales.

Puede definirse un número real, en estos términos, como un número positivo o negativo que puede o no tener cifras de decimal finito o infinito y puede representarse mediante un punto en la recta de números reales. En este sentido, el teorema fundamental de la geometría analítica establece que a cada número real le corresponde un punto en la recta de los números reales y viceversa.

Con números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas con dos excepciones importantes:

1.- No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc) de números negativos en números reales, razón por la que existe el conjunto de los números complejos donde estas operaciones sí están definidas.

2.- No existe la división entre cero, pues carece de sentido dividir entre nada o entre nadie, es decir, no existe la operación de dividir entre nada.

Estas dos restricciones tienen repercusiones importantes en ramas más avanzadas de las matemáticas: existen asíntotas verticales en los lugares donde una función se indefine, es decir, en aquellos valores de la variable en los que se presenta una división entre cero, o no existe gráfica real en aquellos valores de la variable en que resulten números negativos para raíces de orden par, por mencionar un ejemplo de construcción de gráficas en geometría analítica.

Los números reales miden cantidades continuas que se expresan con fracciones decimales que tienen una secuencia infinita de dígitos a la derecha de la coma decimal, como por ejemplo

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

324,8232. Frecuentemente también se presentan con tres puntos consecutivos al final (324,823211247...), lo que significaría que aún faltan más dígitos decimales, pero que se consideran sin importancia.

Propiedades de los números reales

Las propiedades de los números reales resultan ser tan básicas que las utilizaremos como axiomas para justificar otras propiedades más complicadas de los números reales.

Una de las ventajas resultantes al describir los números reales mediante un conjunto de axiomas está en la comparación de las propiedades algebraicas de un sistema con las de otro.

El subconjunto N de los números naturales también satisface las propiedades de la clausura de la adición y de la multiplicación ya que para todo n, m en N , la suma $n+m$ y el producto $n \cdot m$ están también en N .

Por ejemplo 3, 7 están en N y $3 + 7 = 10$ y $3 \cdot 7 = 21$, es decir, 10 y 21 son también números naturales.

El subconjunto I de los números naturales impares no tiene la propiedad de clausura de la adición, ya que 3 y 5 están en I , pero su suma $3 + 5 = 8$ no está en I . Sin embargo el conjunto I es cerrado bajo la operación de la multiplicación; esto es, el producto de dos números impares es también impar, ya que $3 \cdot 5 = 15$ y 15 es un número impar.

Propiedades de la adición de los números reales. Axiomas

Axioma 1. Clausura de la adición. Para todo a y b en R , la suma $a + b$ está en R .

Axioma 2. Asociatividad de la adición. Para todo a, b y c en R , $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Axioma 3. Conmutatividad de la adición. Para todo a y b en R , $a + b = b + a$.

Axioma 4. Distributividad de la multiplicación respecto a la adición. Para todo a, b y c en R , $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Axioma 5. Propiedad de adición para la igualdad. Para todo a, b y c en R , si $a = b$, si

$a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Esta propiedad nos muestra que si sumamos ambos miembros de una igualdad por un mismo número obtenemos otra igualdad.

Axioma 6. Existencia de una identidad aditiva. Existe un único número 0 tal que

$$a + 0 = 0 + a.$$

El número 0 es, por tanto, la solución única de la ecuación $a + x = a$, y 0 actúa respecto a la adición de la misma manera que la identidad multiplicativa 1 lo hace respecto a la multiplicación.

El siguiente axioma garantiza la existencia de un inverso aditivo para cada número a , esto es, un número que, sumado a a , da 0 .

Axioma 7. Existencia de un inverso aditivo. Para todo número a existe un único número $-a$ (léase menos a o el negativo de a) tal que $a + (-a) = 0$.

El número $-a$ es, por tanto, la solución única de la ecuación $a + x = 0$. El cero es su propio inverso aditivo.

Por ejemplo

Si $a = 6$, $-a = x$, entonces, $6 + (-6) = 0$.

El número $-a$ es, por tanto, la solución única de la ecuación $a + x = 0$. Como $0 + 0 = 0$, se sigue que 0 es solución de $0 + x = 0$, de modo que $0 = -0$, esto es, 0 es su propio inverso aditivo.

Propiedades de la multiplicación de los números reales

Axioma 1. Clausura de la multiplicación. Para todo a y b en R , el producto $a \cdot b$ está en R .

Axioma 2 M. Asociatividad de la multiplicación. Para todo a, b y c en R , $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Se puede escribir simplemente $a \cdot b \cdot c$, ya que no influye el lugar en que coloquemos los paréntesis cuando se trata de una sucesión de multiplicaciones. Sin embargo, si una expresión incluye adiciones y multiplicaciones, la colocación de los paréntesis es importante.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Axioma 3 M. Conmutatividad de la multiplicación. Para todo a y b en R , $a \cdot b = b \cdot a$.

Cuando trabajamos con subconjuntos de los números reales (por ejemplo con los naturales), entonces estos axiomas de asociatividad y conmutatividad de la adición y la multiplicación, se cumplen automáticamente.

Axioma 4. Distributividad de la multiplicación respecto a la adición. Para todo a , b y c en R , $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
Este axioma relaciona las dos operaciones de adición y multiplicación de números reales. Tienen dos formas, una para la multiplicación a izquierda y otra para multiplicación a derecha.

Hay un axioma adicional de los números reales que también se cumple para los naturales.

Axioma 5. Existencia de la identidad multiplicativa. Existe un único número 1 en R tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo en R .

Este axioma es satisfecho por N , ya que 1 es número natural. Obsérvese que en particular, $1 \cdot 1 = 1$.

Axioma 6. Propiedad de multiplicación para la igualdad. Para todo a , b y c en R , si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Esta propiedad nos muestra que si multiplicamos ambos miembros de una igualdad por un mismo número obtenemos otra igualdad.

Axioma 7. Existencia de inversos multiplicativos. Para todo número a diferente de 0 , existe un único número $1/a$ (léase recíproco de a) tal que $a \cdot 1/a = 1$.

El número $1/a$ es por tanto, la solución única de la ecuación $a \cdot x = 1$. Como $1 \cdot 1 = 1$, se sigue que 1 es una solución de $1 \cdot x = 1$, de modo que $1 = 1/1$; es decir, uno es su propio inverso multiplicativo. Asimismo, $(-1) \cdot (-1) = 1$, de modo que -1 es una solución de $(-1) \cdot x = 1$ y $-1 = 1/(-1)$; por tanto, -1 es también su propio inverso multiplicativo.

Por el axioma de la conmutatividad, $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$; por tanto, $\frac{1}{a}$ es la única solución de la ecuación $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot x = 1$, de lo cual se sigue

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

que a es el recíproco de $\frac{1}{a}$.

Además existen otros axiomas referentes a la igualdad que se usan constantemente en el álgebra moderna.

Axioma 1. Reflexividad de la igualdad. Para todo a en R , $a = a$.

Axioma 2. Simetría de la igualdad. Para todo a y b en R , si $a = b$, entonces $b = a$.

Axioma 3. Transitividad de la igualdad. Para todo a , b y c en R , si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Teoremas

Teorema 1. Para todo número a , $-(-a) = a$, esto es el negativo del negativo de a es a .

Teorema 2. Ley de cancelación para la adición. Para todos los números a , b y c , si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Teorema 3. Para todo número a tenemos $a \cdot 0 = 0$.

Teorema 4. Para todo los números a y b , $(-a) \cdot b = -(ab)$.

Corolario 1. Para todo número b , $(-1) \cdot b = -b$.

Corolario 2. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Teorema 5. Para todos los números a y b , $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Teorema 6. Para todos los números a y b , $-(a + b) = (-a) + (-b)$, es decir el negativo de la suma de dos números es la suma de los negativos de los números.

Teorema 7. Para cada par de números a y b existe una solución única para la ecuación $a + x = b$.

Enteros y factorizaciones

Es importante tener en cuenta que hay axiomas que se cumplen en un conjunto determinado y en otros no, por ejemplo que se cumple en el conjunto de los números reales pero no en el conjunto de los naturales (N). En este grupo se encuentran los axiomas de la identidad aditiva y la existencia

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

de un inverso aditivo que no satisface en el conjunto de los números naturales, puesto que, por ejemplo, los números 0 y -1 no están en N . En esta sección se considera el sistema de los enteros, que es el menor subconjunto de R que incluye a N y satisface todos los axiomas de los números reales. Todo conjunto que incluya a N y que satisface los axiomas de la identidad aditiva y la existencia de un inverso aditivo debe contener el cero y los inversos aditivos de todos los elementos de N .

Cómo $-(-n) = n$ por un teorema 1, el inverso aditivo de un número negativo es un entero positivo. Asimismo, 0 es su propio inverso aditivo y el inverso aditivo de todo entero positivo es un entero negativo por definición; por tanto, el inverso aditivo de todo entero es un entero, de modo que Z satisface el axioma de la existencia de un inverso aditivo.

El conjunto Z de los enteros es cerrado respecto de la adición y de la multiplicación y Z satisface el axioma de la existencia de un inverso aditivo, es cerrado también respecto a la sustracción. *Definición.* Si n , m y k son enteros y $n \cdot m = k$, entonces se dice que n y m son factores o divisores de k y se dice que k es múltiplo de n y m

Ejemplo 1: $42 = 6 \cdot 7$ de modo que 6 y 7 son factores de 42 y 42 es múltiplo de 6 y 7. Otros factores de 42 son -6 y -7 (puesto que $42 = (-6) \cdot (-7)$) y 1 y 42 (puesto que $42 = 1 \cdot 42$).

De modo más general, si n es factor de k , entonces $-n$ es también factor de k , ya que si $n \cdot m = k$, entonces $(-n) \cdot (-m) = k$. Asimismo, 1 es factor de todo entero, ya que $1 \cdot k = k$ y todo entero k es divisor de sí mismo.

Ejemplo 2: 3 es divisor de 15, ya que $3 \cdot 5 = 15$ y 15 es divisor de 60 ya que $15 \cdot 4 = 60$; entonces 3 es divisor de 60 ya que $3 \cdot (4 \cdot 5) = 60$.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

De modo más general, si n es divisor de k y k es divisor de s , entonces n es divisor de s , ya que si $n \cdot m = k$ y $k \cdot r = s$, entonces $n \cdot (m \cdot r) = (n \cdot m) \cdot r = s$.

Ejemplo 3: El entero 0 es múltiplo de todo entero n , ya que $n \cdot 0 = 0$. Sin embargo, 0 es el único entero que tiene un número infinito de divisores.

Todos los enteros positivos distintos de uno, pueden clasificarse ya sea como números compuestos o primos. Un entero positivo se llama compuesto si es distinto de uno y puede ser expresado como el producto de dos o más enteros positivos, los cuales son sus factores. En ciertos casos esos factores pueden repetirse. Por ejemplo 12, 24, 48 y 96 son compuestos, porque $12 = 4 \cdot 3$, $24 = 6 \cdot 4$, $48 = 6 \cdot 8$, $96 = 12 \cdot 8$.

Un entero positivo se llama primo si es distinto de uno y no es compuesto; en otras palabras, la única forma en que podemos expresar un número primo p como el producto de dos enteros positivos es $p = p \cdot 1$ ó $p = 1 \cdot p$. Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19....

Todo entero positivo par distinto de 2 se puede expresar como $2k$, siendo k un número natural distinto de uno, de modo que todo entero positivo par distinto de dos es compuesto. Todo entero compuesto puede descomponerse en un producto de primos, puesto que cada factor compuesto puede a su vez descomponerse en factores menores hasta que, en último término, todos los factores sean primos. Por ejemplo, $6 = 2 \cdot 3$, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$, $72 = 2 \cdot 6 \cdot 6$. Un hecho importante es que los primos que aparecen en tales descomposiciones serán siempre los mismos y cada uno aparecerá siempre el mismo número de veces en cada descomposición, si bien el orden puede variar.

Se dice que dos enteros son relativamente primos si no tienen factores primos comunes, de modo que sus únicos son 1 y -1. Por ejemplo 9 y 15 no son relativamente primos; pero 15 y 24 lo son.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

Ejercicios I

1- Indíquese cuál de los axiomas de los números reales justifica cada una de las siguientes proposiciones siguientes:

- a) $2.3 + 2.5 = 2.(3 + 4)$
- b) $(10 + 5) + 3 = 10 + (3 + 5)$
- c) $(4.10).10 = 4.(10.10)$
- d) $(x+2) + 3 = x + (2 + 3)$
- e) $(x+3)x = x^2 + 3x$
- f) $4.(x + 3) = 4.x + 4.3$
- g) $4.(10x) = (4.10) x$

2- Cada una de las proposiciones siguientes que siguen pueden justificarse en dos pasos. En cada caso indíquese qué axioma justifica cada paso.

- a) $(10+8) + 20 = 10 + (20+8)$
- b) $5.2 + 6.2 = (6+5).2$
- c) $3.(4.10 + 2) = (3.4).10 + 3.2$
- d) $(40+3).(100+2) = (40.100 + 3.100) + (40.2 + 3.2)$

3- Justifíquese cada uno de los pasos en las siguientes igualdades:

- a) $(x+3).(x+2) = (x+3)x + (x+3).2 = (x^2 + 3x) + (2x + 3.2)$
- b) $(x^2 + 3x) + (2x + 3.2) = x^2 + (3x + (2x + 3.2)) = x^2 + ((3x + 2x) + 3.2)$
- c) $(x+2).(2x + 3) = 2x^2 + (2.2 + 3)x + 2.3$

4- Muéstrese porqué $(x+1)^2 = x^2 + (1+1)x + 1$, e indica qué axiomas justifican cada paso.

5- Muéstrese cuidadosamente porque $(a.b)^2 = a^2.b^2$ e indíquese que axiomas justifican cada paso.

6- Muéstrese cuidadosamente porqué $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ (Aquí usamos el hecho de que $1+1 = 2$)

7- Demostrar que para todos los números, a, b y c, si $a+c = b+c$, entonces $a = b$ (Ley de cancelación para la adición).

8- Demuéstrese que $a(-b) = -ab$ para todos los números reales a y b.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

9- Demuéstrese que la operación de sustracción no es conmutativa; es decir, es posible encontrar números reales a y b tales que $b-a \neq a-b$. ¿Qué puede decirse de a y b si

$$b-a = a-b?$$

10- Demuéstrese que la operación de sustracción no es asociativa; es decir, es posible encontrar números reales a , b y c tales que $(a - b) - c \neq a - (b+c)$.

11- Demuéstrese que el inverso aditivo de un número real es único, es decir, si

$$a+u = 0, \text{ entonces } u = -a.$$

12- Muéstrese por qué la operación de sustracción satisface una ley de distributividad; es decir, para a , b y c en \mathbb{R} , se tiene $c(b-a) = cb - ca$.

13- Demuéstrese que para a y b en \mathbb{R} , $-(b-a) = (-b) + a$. (Utilícese el problema anterior. Esta es la regla de los signos para las cantidades entre paréntesis precedidas del signo menos).

14- Demuéstrese que si $-n$ y $-n$ son dos enteros negativos, entonces su producto es un entero positivo.

15- Demuéstrese que el producto de un entero negativo y un entero positivo es un entero negativo.

Ejercicios II

1- ¿Qué hecho garantiza que el producto del entero cero por otro entero es un entero?

2- Explíquese por qué el conjunto de los enteros es cerrado respecto a la multiplicación.

3- Demuéstrese que si $-n$ y $-m$ son dos enteros negativos, entonces su suma es un entero negativo.

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

4- Dese ejemplos para mostrar que la suma de un entero positivo y un entero negativo puede ser un entero positivo, un entero negativo ó cero.

5- Muéstrese que 15 y 91 son ambos de la forma $p \cdot q$, siendo p y q números primos distintos. Enumérense todos los enteros positivos que sean divisores de 15. Hágase lo mismo para 91. ¿Qué puede decirse en general acerca de los divisores de un entero de la forma $p \cdot q$ donde p y q son primos diferentes.

6- Enumérense los factores de 8 y de 27. ¿Qué puede decirse en general acerca de los divisores de un entero de la forma $p^3 = p \cdot p \cdot p$, para un primo p ?

7- Sea $J = \{\text{divisores de } 48\}$ y $K = \{\text{divisores de } 80\}$. Enumérense todos los elementos de $K \cap J =$ (el conjunto de los divisores comunes de 48 y 80). ¿Cuál es el máximo divisor común de 48 y 80?

8- Sea $G = \{\text{enteros positivos que son múltiplos de } 4\}$ y $H = \{\text{enteros positivos que son múltiplos de } 6\}$. Enumérense cinco de los elementos de $G \cap H =$ (el conjunto de los múltiplos comunes de 4 y de 6). ¿Cuál es el mínimo múltiplo común de 4 y 6?

9- Demuéstrese que si k es un múltiplo de n y r es un múltiplo de k , entonces r es un múltiplo de n .

10- Demuéstrese que el producto de tres enteros negativos es un entero negativo.

11- Explíquese por qué el cuadrado de un entero es un entero positivo o cero.

12- Sea Z_i el conjunto de los enteros impares; esto es $Z_i = \{x/ x = 2r + 1 \text{ para algún } r \text{ en } Z\}$. Demuéstrese que la suma de los impares es par, esto es, si $x = 2r + 1$, $y = 2s + 1$, siendo r y s enteros, entonces $x + y = 2t$ para algún entero t .

13- Demuéstrese que el conjunto Z_i definido en el problema anterior es cerrado respecto a la multiplicación; esto es, si x e y son impares, entonces, $x \cdot y = 2u + 1$ para algún u en Z .

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Maximo Aquino

14- Sea Z_p el conjunto de los enteros pares (Z_p incluye a P , el conjunto de los naturales pares). Demuéstrese que el conjunto Z_p es cerrado respecto a la adición; esto es, si $n = 2r$ y $m = 2s$ son dos enteros pares; entonces su suma es par. ¿Qué axioma se puede utilizar para justificar esto?

15- Demuéstrese que el conjunto Z_p definido en el problema anterior es cerrado respecto a la multiplicación; esto es, si n y m son pares, entonces $n \cdot m = 2t$ para algún t en Z . ¿Qué axioma se usa para justificar este hecho?

16- Demuéstrese que si n es un entero par entonces $n^2 = n \cdot n$ es par.

Bibliografía

- 1- Vance, Elbridge P. Algebra y Trigonometría. Adisson – Wesley. Iberoamericana. S.A. Wilmington, Delaware. E. U. A. 3^a Edición. 1978.
- 2- Spiegel, Murray R. Algebra Superior. Shaum. Impreso en México. Litográfica Ingramex. Año 2005.
- 3- Oteyza de Oteyza, Elena de. Carlos Hernández Garcíelago y Emma Sam Osnaya. Algebra. Prentice – Hall Hispanoamericana S. A. México. 1^a Edición. Año 1996.
- 4- [http. es.wikipedia.org](http://es.wikipedia.org).
- 5- [http. docente. ucol. mx/grios](http://docente.ucol.mx/grios).
- 6- [http. www.monografia. com](http://www.monografia.com).

Lic. Maximo Aquino



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁREA ANÁLISIS

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

MATERIAL DE APOYO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

UNIDAD: Límites y Continuidad de funciones de una variable real

OBJETIVOS

- Comprender matemática y gráficamente el concepto de Límite de una función
- Comprender matemática y gráficamente el concepto de Continuidad de una función

CONTENIDOS

- Definición intuitiva de Límite en un punto
- Definición formal de Límite en un punto
- Existencia y Unicidad del Límite en un punto
- Propiedades del Límite en un punto
- Definición intuitiva de Límite en el infinito
- Definición formal de Límite en el infinito
- Existencia y Unicidad del Límite en el infinito
- Propiedades del Límite en el infinito
- Definición intuitiva de Límites infinitos
- Definición formal de Límites infinitos
- Propiedades del Límites infinitos
- Límites indeterminados
- Definición de Continuidad
- Funciones continuas en un punto y en un intervalo
- Discontinuidad. Tipos
- Propiedades de la continuidad

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

LECTURAS BÁSICAS

- Hacer un estudio de los Capítulo 7 y 8, Páginas 63 al 88 del Libro “Cálculo Diferencial e Integral” de Frank Ayres Jr. y Elliot Mendelson.
- Hacer un estudio de los Capítulo 7 y 8, Páginas 63 al 88 del Libro “Cálculo una variable. Trascendentes tempranas” de James Stewart.

LECTURAS RECOMENDADAS

- Hacer un estudio de los Capítulo 2, Páginas 61 al 91, y 4, Páginas 197 al 203 del Libro “Cálculo con Geometría Analítica” de Edwin Purcell y Dale Varberg.
- Hacer un estudio de los Capítulo 1, Páginas 54 al 97, y 3, Páginas 220 al 231 del Libro “Cálculo de una variable” de George B. Thomas Jr. y Ross L. Finney.

1. LÍMITE

1.1. Límite en un punto

1.1.1. Definición intuitiva del límite en un punto

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Si $f(x)$ se aproxima de manera arbitraria a L para toda x suficientemente próxima de x_0 , pero distinta de x_0 , se dice que “el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

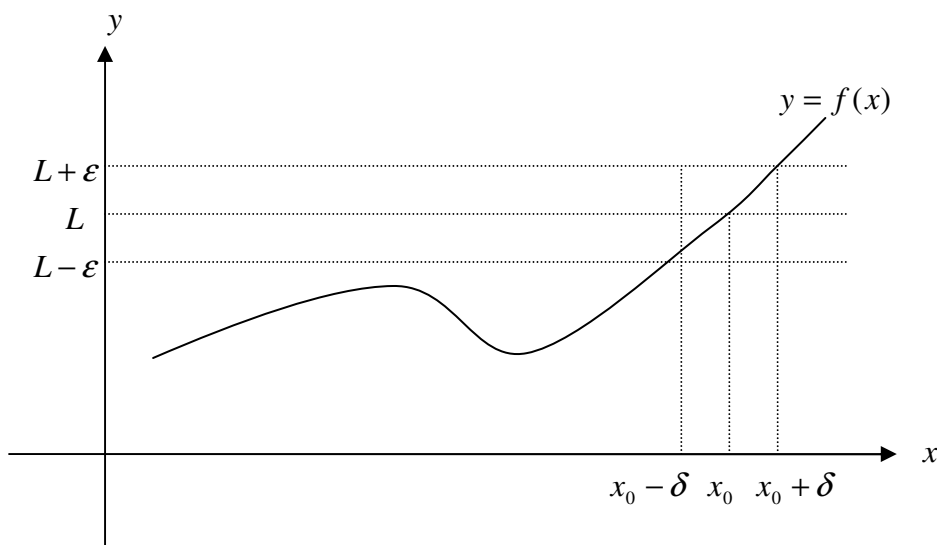
1.1.2. Definición formal del límite en un punto

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Se dice que “el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si para cada número $\varepsilon > 0$ (sin importar lo pequeño que sea), existe un $\delta > 0$ tal que: $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nota: La condición $0 < |x - x_0| < \delta$ significa que no se considera $x = x_0$ al hallar límite, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = x_0$.

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



Ejemplos:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 7 = 5$

Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 4| < \delta$ entonces $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$.

Como $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$ si y sólo si $|3x - 12| < \varepsilon$ si y sólo si $|3(x - 4)| < \varepsilon$ si y sólo si

$3|x - 4| < \varepsilon$ si y sólo si $|x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$, se puede escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, si se escoge $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ se tiene que

si $0 < |x - 4| < \delta$ entonces $|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$,

es decir si $0 < |x - 4| < \delta$ entonces $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$.

Luego, $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 7 = 5$.

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$.

Sea $x \neq 2$, como $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$ si y sólo si $\left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$ si y sólo si $|2x+1-5| < \varepsilon$ si y sólo si $|2x-4| < \varepsilon$ si y sólo si $2|x-2| < \varepsilon$ si y sólo si $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$, se puede escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, si se escoge $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| = \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| = |(2x+1)-5| = |2x-4| = |2(x-2)| = 2|x-2| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

es decir, si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$.

La cancelación del factor $x-2$ es válida porque $0 < |x-2| < \delta$ implica que $x \neq 2$.

Luego, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = 5$.

1.1.3. Existencia y unicidad del límite en un punto

Cuando existe un número real L tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, se dice que existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Además L es único, es decir, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

1.1.4. Propiedades

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existen. Entonces:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 8) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$
- 9) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, si n es par supondremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

Ejemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 5} 3x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 = 2 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 5} x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4) = 2 \cdot (\lim_{x \rightarrow 5} x)^2 - 3 \cdot 5 + 4 = 2 \cdot 5^2 - 15 + 4 = 50 - 11 = 39$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + 9)}}{4} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 9}}{4} = \frac{\sqrt{(\lim_{x \rightarrow 4} x)^2 + 9}}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} = \frac{\sqrt{4^2 + 9}}{4} = \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} = \frac{\sqrt{25}}{4} = \frac{5}{4}$$

3) Si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 8$, encuentre $\lim_{x \rightarrow 3} \{ [f(x)]^2 \cdot \sqrt[3]{g(x)} \}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{ [f(x)]^2 \cdot \sqrt[3]{g(x)} \} = \lim_{x \rightarrow 3} [f(x)]^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \right]^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 16 \cdot 2 = 32$$

1.1.4. Propiedades (Continuación)

10) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0] = P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0$$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

11) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ y $Q(x_0) = b_m x_0^m + b_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + b_1 x_0 + b_0 \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0}{b_m x_0^m + b_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + b_1 x_0 + b_0}$$

Ejemplos:

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7 \cdot 2^5 - 10 \cdot 2^4 - 13 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 8} = \frac{224 - 160 - 26 + 6}{12 - 12 - 8} = \frac{44}{-8} = -\frac{11}{2}$

1.2. Límites en el infinito

1.2.1. Definición intuitiva del límite en el infinito

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[c, \infty)$ para algún número c . Si $f(x)$ se aproxima de manera arbitraria a L para toda $x > 0$ suficientemente grande, se dice que “el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a infinito”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $(-\infty, c]$ para algún número c . Si $f(x)$ se aproxima de manera arbitraria a L para toda $x < 0$ suficientemente grande, se dice que “el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a menos infinito”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

1.2.2. Definición formal del límite en el infinito

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[c, \infty)$ para algún número c . Decimos que el “límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a infinito”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, si para cada número $\varepsilon > 0$ (sin importar lo pequeño que sea), existe un $N > 0$ tal que: $x > N$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

MSc. Cristhian Martínez

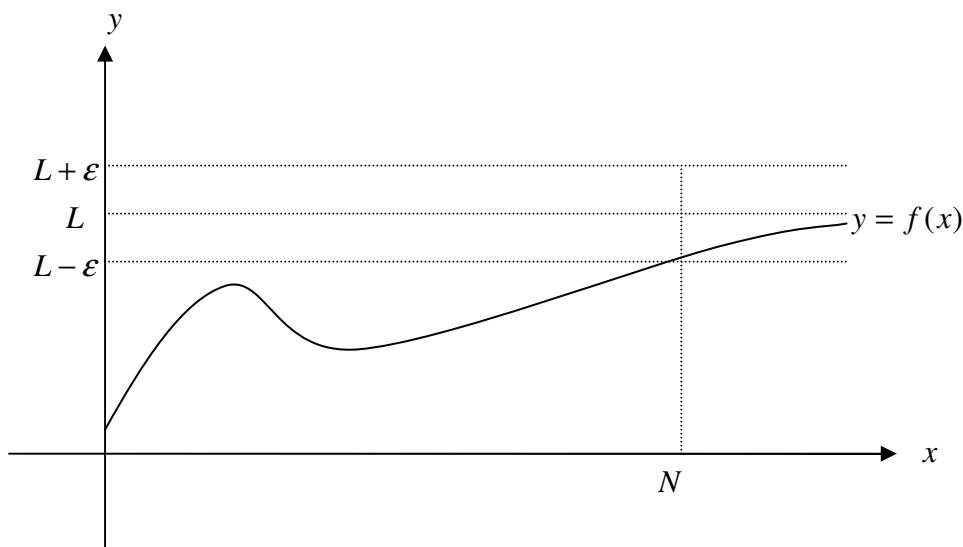
Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $(-\infty, c]$ para algún número c . Decimos que el “límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a menos infinito”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, si para cada número $\varepsilon > 0$ (sin importar lo pequeño que sea), existe un $N > 0$ tal que: $x < -N$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

MSc. Cristhian Martínez

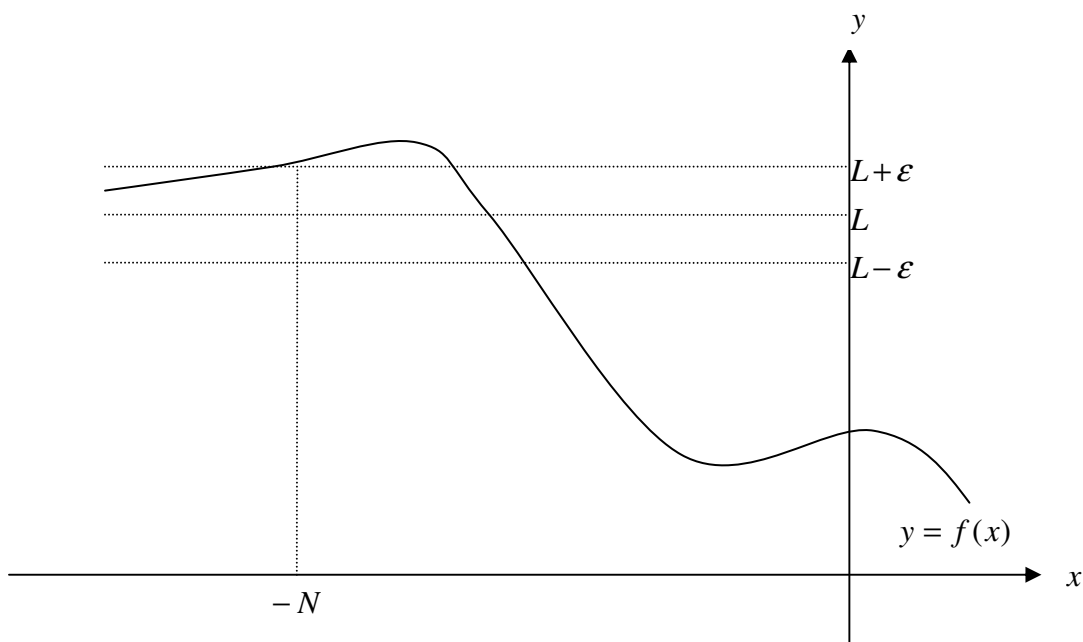
Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



Ejemplos: Si $r = \frac{p}{q}$ donde p y q son enteros con $q \neq 0$, entonces

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$.

Como $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$ si y sólo si $\left| \frac{1}{x^r} \right| < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{|1|}{|x^r|} < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{1}{|x|^r} < \varepsilon$ si sólo si $|x|^r > \frac{1}{\varepsilon}$ si y sólo si $|x| > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$ si y sólo si $x > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$ o $x < -\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$, se puede escoger $N = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$.

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, si se escoge $N = \frac{1}{\varepsilon^r}$ se tiene que

si $x > N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^r} \right| = \frac{1}{|x|^r} < \frac{1}{N^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon^r} \right)^r} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$, es decir si

$x > N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$.

Luego, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, si q es impar.

Sea $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $N > 0$ tal que si $x < -N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$.

Como $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$ si y sólo si $\left| \frac{1}{x^r} \right| < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{|1|}{|x|^r} < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{1}{|x|^r} < \varepsilon$ si sólo si $|x|^r > \frac{1}{\varepsilon}$ si y sólo si $|x| > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$ si y sólo si $x > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$ o $x < -\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$, se puede escoger $N = -\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}$.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$, si se escoge $N = \frac{1}{\varepsilon^r}$ se tiene que

si $x < -N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x^r} \right| = \frac{1}{|x|^r} < \frac{1}{N^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon^r} \right)^r} = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$, es decir si

$x < -N$ entonces $\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon$.

Luego, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



Como $\frac{1}{x^r}$ no está definida para $x < 0$ cuando q es par, se considera q impar.

1.2.3. Existencia y unicidad del límite en el infinito

Cuando existe un número real L tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, se dice que existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Además L es único, es decir, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

Análogamente, cuando existe un número real L tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, se dice que existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Además L es único, es decir, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

1.2.4. Propiedades

Sean n un entero positivo, k una constante y f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ existen. Entonces:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k = k$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \right]^n$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)}$, si n es par supondremos que $\lim_{x \rightarrow x \pm\infty} f(x) > 0$.

Ejemplos:

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2} - 2 \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - 2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 1$$



$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 5 + 0 = 5$$

1.3. Límites infinitos

1.3.1. Definición intuitiva de los límites infinitos

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Si $f(x)$ crece de manera arbitraria a para toda x suficientemente próxima de x_0 , pero distinta de x_0 , se dice que “el límite de $f(x)$ es infinito cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Si $f(x)$ decrece de manera arbitraria a para toda x suficientemente próxima de x_0 , pero distinta de x_0 , se dice que “el límite de $f(x)$ es menos infinito cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

1.3.2. Definición formal de los límites infinitos

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Se dice que “el límite de $f(x)$ es infinito cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe

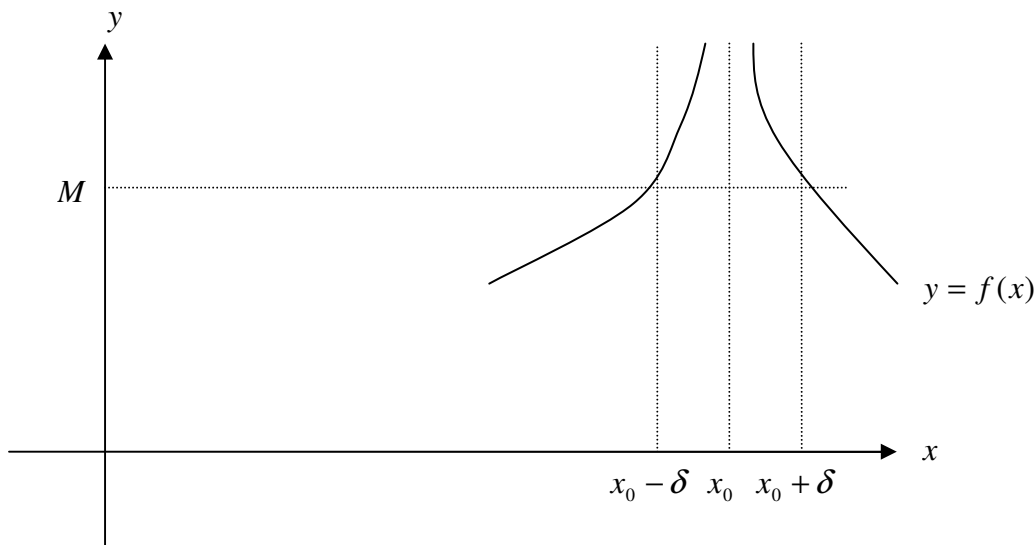
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, si para cada número $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:
 $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) > M$.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

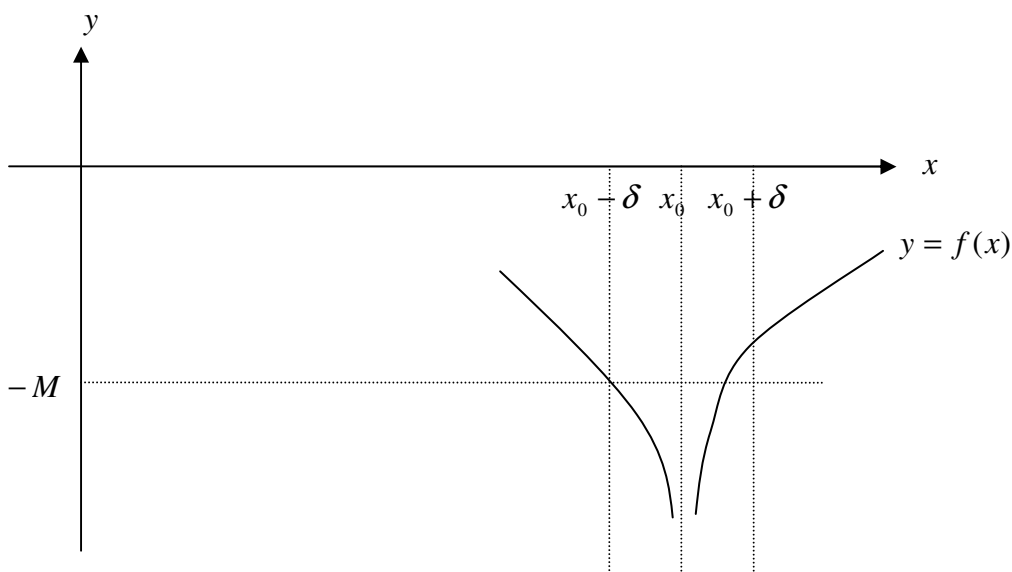
MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto posiblemente en x_0 . Se dice que “el límite de $f(x)$ es menos infinito cuando x tiende a x_0 ”, y se escribe

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, si para cada número $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:
 $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) < -M$.



MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

Ejemplos:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

Sea $M > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $\frac{1}{x^2} > M$.

Como $\frac{1}{x^2} > M$ si y sólo si $x^2 < \frac{1}{M}$ si y sólo si $\sqrt{x^2} < \frac{1}{\sqrt{M}}$ si y sólo si $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ si y solo si $|x-0| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, se puede escoger $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Ahora, para cada $M > 0$, si se escoge $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ se tiene que si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{|x-0|^2} > \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$, es

decir si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $\frac{1}{x^2} > M$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$

Sea $M > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $-\frac{1}{x^2} < -M$.

Como $-\frac{1}{x^2} < -M$ si y sólo si $\frac{1}{x^2} > M$ si y sólo si $x^2 < \frac{1}{M}$ si y sólo si $\sqrt{x^2} < \frac{1}{\sqrt{M}}$ si y sólo si $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ si y solo si $|x-0| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, se puede escoger $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Ahora, para cada $M > 0$, si se escoge $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ se tiene que si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{|x|^2} = -\frac{1}{|x-0|^2} < -\frac{1}{\delta^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{M}} = -M$, es decir si $0 < |x-0| < \delta$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



entonces $-\frac{1}{x^2} < -M$.

1.3.3. Propiedades

Sean n un número entero positivo, y f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, entonces:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm h(x)] = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \pm h(x)] = -\infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot h(x)] = \infty$ si $L > 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot h(x)] = -\infty$ si $L < 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)] = -\infty$ si $L > 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)] = \infty$ si $L < 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)]^n = -\infty$ si n es impar, y $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)]^n = \infty$ si n es par.
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{g(x)} = -\infty$ si n es par.

Ejemplos:

1) Como $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \infty$$

2) Como $\lim_{x \rightarrow -2} -3 = -3$ y $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow -2} -\frac{3}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left(-3 \frac{1}{(x+2)^2} \right) = -\infty$$



1.4. Tipos de indeterminación

1.4.1. Primer Tipo:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

En este caso para calcular el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

1.4.1.1. Cancelación de un factor común

Cuando es posible factorizar el numerador y el denominador y cancelar el factor común que anula tanto el numerador y el denominador

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 1^2 + 1 - 2 = 1 - 1 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Como se quiere calcular el límite cuando x tiende a 1, se considera $x \neq 1$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

El factor $x-1$ se puede cancelar porque se considera $x \neq 1$.

1.4.1.2. Creación y cancelación de un factor común

Cuando tenemos expresiones con radicales que anulan el numerador o el denominador, entonces podemos crear un factor común racionalizando dicha expresión.

Ejemplo:



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 9} - 3) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9} - \lim_{x \rightarrow 0} 3 = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9)} - 3 = \sqrt{0^2 + 9} - 3 = 3 - 3 = 0 \quad \text{y}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^2 = 0$, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 9})^2 - 9}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9} + \lim_{x \rightarrow 0} 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 9} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

2) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 25} - 5) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 25} - \lim_{x \rightarrow 0} 5 = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 25)} - 5 = \sqrt{0^2 + 25} - 5 = 5 - 5 = 0 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 4} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} - \lim_{x \rightarrow 0} 2 = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)} - 2 = \sqrt{0^2 + 4} - 2 = 2 - 2 = 0, \quad \text{se}$$

tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 25} - 5)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((\sqrt{x^2 + 25})^2 - 25)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{((\sqrt{x^2 + 4})^2 - 4)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 25 - 25)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{(x^2 + 4 - 4)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}$$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x^2(\sqrt{x^2 + 25} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 25} + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0}(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0}(\sqrt{x^2 + 25} + 5)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} + \lim_{x \rightarrow 0} 2}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 25} + \lim_{x \rightarrow 0} 5} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0}(x^2 + 4)} + 2}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0}(x^2 + 25)} + 5} = \frac{\sqrt{0^2 + 4} + 2}{\sqrt{0^2 + 25} + 5} = \frac{2 + 2}{5 + 5} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

1.4.2. Segundo Tipo:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$.

En este caso para calcular el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ se tiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Cuando $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios o raíces n-ésimas de polinomios, para determinar el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, se pueden dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x . Podemos suponer que $x \neq 0$, puesto que sólo estamos interesados en los valores grandes de x .

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 8x - 3) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2) = \infty$, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Como la mayor potencia de x es x^2 , dividimos el numerador y el denominador entre x^2 . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2 + 8x - 3}{x^2}}{\frac{3x^2 + 2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{8x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}}$$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + 8 \frac{1}{x} - 3 \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + 2 \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + 8 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{5 + 8 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{3 + 2 \cdot 0} = \frac{5}{3}$$

2) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + 1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 5) = \infty$, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

La mayor potencia de potencia de x en el numerador es $\sqrt{x^2} = |x|$ y en el denominador es x . Como se quiere calcular el límite cuando x tiende a infinito, se considera $x > 0$. Entonces $\sqrt{x^2} = |x| = x$ y dividiendo el numerador y denominador entre x se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{\frac{\sqrt{x^2}}{x} (3x - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{3x}{x} - \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{3 - 5 \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - 5 \frac{1}{x} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 5) = -\infty$, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{-\infty}$.

La mayor potencia de potencia de x en el numerador es $\sqrt{x^2} = |x|$ y en el denominador es x . Como se quiere calcular el límite cuando x tiende a menos infinito, se considera $x < 0$. Entonces $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ y dividiendo el numerador y denominador entre x se tiene:

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{\frac{-\sqrt{x^2}}{3x-5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{3x}{x} - \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-5\frac{1}{x}} = \frac{-\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3-5\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \frac{-\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

1.4.3. Tercer Tipo:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$. En este caso para calcular el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x))$ se tiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

En este caso se trata de expresar la indeterminación en la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ se tiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Entonces factorizando la expresión se tiene:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x(x-1))$ y como $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) = \infty$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \infty$.

2) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ se tiene una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Entonces racionalizando la expresión tenemos:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \infty$.

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

1.4.4. Cuarto Tipo:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$, o bien, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. En este caso para calcular el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x))$ se tiene una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

En este caso se trata de expresar la indeterminación en la forma $\frac{\infty}{\infty}$, o bien, en la $\frac{0}{0}$.

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) \right)$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) = 0 - 0 = 0$, se tiene una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{x+5-x}{x(x+5)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{5}{x(x+5)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x+5} = 0$$

2) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \right)$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{0^2 + 1} = 1 - \frac{1}{1} = 0$, se tiene una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{0^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



2. CONTINUIDAD

2.1. Continuidad en un punto

Una función $f(x)$ es continua en $x = x_0$ si cumple las siguientes condiciones:

- existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- existe $f(x_0)$ (es decir, que x_0 pertenezca al dominio de f)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ejemplos:

Probar si son o no continuas las siguientes funciones en los puntos dados:

1) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 2$

Es continua en $x = 2$ pues,

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$

b) $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = f(2) = 5$

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $x = 3$

No es continua en $x = 3$ ya que $f(3)$ no está definida.

2.2. Continuidad en un intervalo

Una función $f(x)$ es continua en un intervalo I si es continua en cada punto x de I .

Observación: Una función $f(x)$ se dice continua si es continua en todo punto de la recta real, es decir, si es continua en cada $x \in \mathbb{R}$. De esto podemos deducir que todos los polinomios en x son funciones continuas. Por lo tanto, la función $f(x) = x^2 + 1$ del ejemplo a) es continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3. Discontinuidad en un punto

Una función $f(x)$ es discontinua en $x = x_0$ si $f(x)$ no es continua en $x = x_0$, es decir, si una o varias de las condiciones de continuidad no se satisfacen para $x = x_0$.



Ejemplos:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Es discontinua en $x=2$ porque $f(x)$ no esta definida para $x=2$, ya que el denominador se hace cero, además $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Es discontinua en $x=2$ porque $f(2)$ no esta definida ya que el denominador es igual a cero.

2.4. Tipos de discontinuidad

2.4.1. Discontinuidad inevitable:

Si una función $f(x)$ es discontinua en $x = x_0$, la discontinuidad se llama inevitable cuando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe.

2.4.2. Discontinuidad evitable:

Si una función $f(x)$ es discontinua en $x = x_0$, la discontinuidad se llama evitable o removible cuando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe. Se llama así porque se puede evitar o remover la discontinuidad en $x = x_0$ redefiniendo la función escribiendo $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ejemplos:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, podemos decir que en $x=2$ $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita o inevitable.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Como $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = x + 2$ para $x \neq 2$, entonces

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$. En este caso, la discontinuidad se llama evitable ya que puede evitarse redefiniendo la función como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

3) ¿En donde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Solución:

a) Como $f(2)$ no está definido, se tiene que f es discontinua en $x = 2$. Verifiquemos si tiene $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

Por tanto, como existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, la discontinuidad es removible; por lo que podemos eliminarla redefiniendo la función como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

b) En este caso, $f(0) = 1$, es decir f está definida en $x = 0$, pero como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe; se tiene que f es discontinua en $x = 0$ y la discontinuidad es inevitable.

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

c) Aquí, $f(2) = 1$ y

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3. \text{ Pero } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2),$$

por lo tanto, f no es continua en $x = 2$. Pero la discontinuidad es removible o evitable, es decir, f se puede redefinir evitando así la discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

4) Probar que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$

Si $-1 \leq x_0 \leq 1$, entonces, al aplicar las leyes de los límites tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [1 - \sqrt{1 - x^2}] = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} (1 - x^2)} = 1 - \sqrt{1 - x_0^2} = f(x_0)$$

Por lo tanto, para cada $x \in [-1, 1]$ se verifica lo siguiente:

- a) f esta definida en $x = x_0$, es decir, existe $f(x_0)$;
- b) existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

De ahí que f es una función continua.

2.5. Propiedades de la continuidad

Si f y g son continuas en $x = x_0$ y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en $x = x_0$:

- 1) $f + g$; 2) $f - g$; 3) $f \cdot g$; 4) $\frac{f}{g}$, si $g(x_0) \neq 0$ y 5)

$c \cdot f$

Ejemplos:

1) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^3 + 2x^2 - 1) = x_0^3 + 2x_0^2 - 1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} (5 - 3x) = 5 - 3x_0$, es decir, $f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ y $f_2(x) = 5 - 3x$ son continuas, se tiene que $f(x)$ es

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

continua para todo $x = x_0$ tal que $5 - 3x_0 \neq 0$, es decir, para todo $x \neq \frac{5}{3}$.

2) ¿ En dónde es continua la función $f(x) = \frac{\ln x + \operatorname{tag}^{-1}x}{x^2 - 1}$?

Como $f_1(x) = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $f_2(x) = \operatorname{tag}^{-1}x$ es continua sobre \mathbb{R} , se tiene por la propiedad 1) que $f_3(x) = \ln x + \operatorname{tag}^{-1}x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

El denominador, $f_4(x) = x^2 - 1$, es un polinomio, de modo que es continuo para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, por la propiedad 4), f es continua en todos los números positivos x , excepto donde $x^2 - 1 = 0$, de este modo, f es continua en $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

2.5. Propiedades de la continuidad (Continuación)

6) Si f es continua en y_0 y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(y_0), \text{ es decir, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

7) Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en x_0 .

Ejemplos:

3) Evaluar $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arcsen} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right)$

Como $\operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x$ es una función continua, entonces por la propiedad 6) se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arcsen} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) = \operatorname{arcsen} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) = \operatorname{arcsen} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arcsen} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) = \operatorname{arcsen} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \right) = \operatorname{arcsen} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

4) $h(x) = \text{sen}(x^2)$

Como $h(x)$ podemos escribir así : $h(x) = f(g(x))$, donde $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x^2$, y como f y g son continuas en todo \mathfrak{R} , se tiene que $h = f \circ g$ es continua en todo \mathfrak{R} .

5) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

Como la función $f(x) = \ln x$ es continua para $x > 0$ y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua en todo \mathfrak{R} porque tanto $g_1(x) = 1$ como $g_2(x) = \cos x$ son continuas en todo \mathfrak{R} , por lo tanto, por la propiedad 7), $F(x) = f(g(x))$ es continua siempre que $(1 + \cos x) > 0$. Luego, no $F(x) = f(g(x))$ no es continua cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \pm 7\pi, \dots$, es decir, $F(x) = f(g(x))$ tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua en los intervalos entre estos valores.

3. EJERCICIOS

3.1. Dado que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$. **Encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique porque:**

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]^2$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} \right]$

3.2. Evalúe el límite y justifique cada paso indicando la/s ley/es de los límites apropiada/s

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

b) $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 1)^4 (t^2 - 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$

d) $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

3.3. Evalúe el límite, si existe:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$ c) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$
- b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-5)^2-25}{h}$ d) $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right]$
- e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^4-1}{h}$ j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2}$
- f) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ k) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right]$
- h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$ m) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$
- i) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$ n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-x^2}}{1-\sqrt{x}}$

3.4. Calcula el valor de:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

3.5. ¿ Hay un número “a” talque $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

3.6. Halla:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-8+\sqrt{x^4-5x+3}}{3x+\sqrt[3]{2x^6-x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{28x^6+6x^4-10}{x^5+3x^3+4x^2-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-8x+5}{x^5+3x^3+4x^2-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x+1) - \sqrt{x^2-1} \right]$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - 3x + 2) \frac{x+5}{x^2 - 5x + 6} \right]$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(5x^2 + 3x - 1) \cdot \frac{8}{3x^2 - 4x + 1} \right]$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right) \right)$

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{h} \right) \right)$

j) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{5}{x^2-1} (x^2 + 4x + 3) \right]$

3.7. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$,

Halla $g(3)$

3.8. Si $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ para $x \neq 3$ y $f(x)$ es continua $x = 3$, encuentre $f(3)$

3.11 .Determine el valor de h para que $f(x)$ sea continua sí:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + h & \text{para } x \neq 1 \\ 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}$$

3.12.Utiliza la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua donde se indica:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$ en $a = 4$

b) $g(x) = (x + 2x^3)^4$ en $a = -1$

c) $h(x) = \frac{x+1}{2x^2-1}$ en $a = 4$

3.13.Utiliza la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el intervalo dado:

a) $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ en $[-4,4]$

b) $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ en $(-\infty,3)$

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MSc. Cristhian Martínez

Lic. Heriberto González

3.14. Explique porque la función es discontinua en el punto dado:

a) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{para } x \neq 1 \\ 2 & \text{para } x = 1 \end{cases}; \text{ en } a = 1$

b) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{para } x \neq 4 \\ 3 & \text{para } x = 4 \end{cases}; \text{ en } a = 4$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{para } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{para } x > 2 \end{cases}; \text{ en } a = 2$



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

ÁREA ESTADÍSTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

MATERIAL DE APOYO

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Objetivo General: Realizar los análisis básicos de datos.

Objetivos Específicos:

- Conocer el concepto de Estadística.
- Distinguir entre las posibles escalas de medidas en que pueden ser medidos los datos.
- Clasificar correctamente las variables según el tipo de medida.
- Identificar los tipos de variables.
- Organizar los datos en distribuciones de Frecuencia.
- Construir los distintos tipos de gráficos.
- Conocer y calcular las medidas de tendencia central comúnmente utilizadas distinguiendo sus ventajas y desventajas.
- Conocer y calcular las medidas de variabilidad de los datos, reconocer su utilidad e identificar las ventajas y desventajas de cada una.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Estadística

Orígenes:

Históricamente la estadística ya surge en la época de los romanos quienes realizaban los primeros Censos de población y de donde tenían un registro de las estadísticas vitales (nacimientos, defunciones).

Más actualmente, la estadística surge de una necesidad, la de tener información bien organizada y resumida para tomar decisiones basadas en éstas.

Es necesario, por tanto, que la estadística refleje lo más claro y objetivamente posible la realidad del fenómeno en estudio.

Definición: Podríamos definir a la Estadística como el estudio de los fenómenos aleatorios (que no se pueden predecir).

Concepto: La estadística se ocupa de la recolección y análisis de los datos, así como de la elaboración de conclusiones en base a los análisis.

Existen teorías bien elaboradas a cerca de las Técnicas de recolección, análisis e interpretación de los resultados.

De acuerdo con los objetivos que tengan la investigación o estudio, se podría dividir a la estadística en dos ramas:

1-) **Estadística Descriptiva:** Es la parte que se encarga del resumen, organización, y como su nombre lo dice, descripción de los datos.

2-) **Estadística Inferencial:** Es la rama de la estadística que se basa en una muestra para tomar decisiones o elaborar conclusiones a cerca de la población.

Obs: Como tomar decisiones basadas en una muestra, que es una información incompleta a cerca de la población, implica cierto riesgo, en general se trata de cuantificar este riesgo por medio de la “**probabilidad**”.

Si se habla de cual sería el objetivo fundamental de la estadística, se puede decir que es hacer inferencias a cerca de una población con base en la información que contiene una muestra.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Esto implica (en términos de tiempo y costo), si se siguen los procedimientos pertinentes, que se puede obtener información de alta calidad a cerca de una población y a un costo bajo al estudiar sólo una parte del total y no al total mismo.

La variedad de fenómenos que puede estudiar la estadística es muy amplia, prácticamente en todos los ámbitos de aplicación.

La idea al realizar un estudio es sacar algún tipo de conclusión, para eso es necesario conocer el fenómeno de estudio, esto es, tratar de dimensionarlo o sea “medirlo”

Medir: Es aplicar un número (en general, un símbolo) a un fenómeno, objeto o relación.

La medida tiene tres características principales:

1. Es relativa, es decir, comparativa, ya que es necesario utilizar un patrón de medida que sirva como unidad: metro, kilo, etc. O en cualquier otro caso se le atribuye arbitrariamente un número.
2. Es probabilística, dado que nunca se puede conseguir una medida exacta. Toda medida oscilará entre dos extremos que serán el límite superior y el límite inferior.
3. Es indirecta; en las ciencias humanas, la mayor parte de las medidas tienen carácter indirecto ya que las características humanas, hechos sociales, etc., no son medibles en sí mismo.

Escalas de Medidas

Son un conjunto de normas para asignar un número (símbolo) a los objetos, fenómenos o relaciones.

Escala Nominal:

Consiste en diferentes categorías que se distinguen únicamente por el nombre.

Una escala nominal consiste en categorías mutuamente excluyentes (si ocurre una categoría ya no puede ocurrir otra) que no implican ningún orden lógico.

Ejemplo: Estado civil de las personas, artículos defectuosos o buenos.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Observar que:

Estado Civil tiene las categorías: soltero, casado, viudo, otros. Además, si un individuo es soltero ya no puede ser a la vez casado o viudo (mutuamente excluyente), pero no se puede establecer un orden entre solteros, casados, viudos o la categoría otros, es decir, no se puede decir que los solteros están primero o son mejores que los casados.

Escala Ordinal:

Esta escala lleva implícita la idea de jerarquización o un orden que permite indicar la posición de los distintos elementos clasificados. Es decir, además de diferenciar las categorías entre sí, permite establecer un orden entre ellos.

Ejemplo: El nivel socioeconómico de las personas, el coeficiente intelectual, etc.

Para una mejor comprensión:

Supongamos que los competidores A, B, C y D juegan una carrera, la idea es obtener un ganador, entonces para ello no bastaría mencionar que llegaron a la meta A, B y C, sino además especificar el orden de llegada, que podría ser: B, A, C. Esto indicaría que B es más rápido que A y C, y que A es más rápido que C, el único problema es que con esta escala no se podría cuantificar cuán más rápido es B que A, C y A que C.

Escala de Intervalo:

La escala de intervalo es un conjunto de valores numéricos para los que la distancia entre números sucesivos es de tamaño constante y medible; en consecuencia, los datos medidos en una escala de intervalos tienen un punto cero arbitrario; la persona que diseña la escala de manera arbitraria decide donde colocar el punto cero. Para calificar como una escala de intervalos solo tiene que definirse la distancia entre los valores numéricos.

Ejemplo: En el índice de precios al consumidor, si el año base es 1982, el nivel de precios durante 1982 estará en 100. Aunque ésta sea una escala de medición de intervalos iguales, el punto cero es arbitrario.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Otro ejemplo es el de la temperatura, en donde el valor 0° es un valor arbitrario pues esto no quiere decir que no exista temperatura, sino que es un valor para indicar un cierto estado de esta variable.

La escala de intervalo es una forma de medida más completa que las escalas ordinal o nominal, ya que permite discernir no sólo qué valor observado es el más grande, sino también por cuanto. Esto se debe a que se mide el ancho del intervalo entre dos valores, en lugar de limitarse a jerarquizarlos. Un ejemplo es: el intervalo Frío/ Caliente constituye una escala ordinal, mientras que el intervalo $65^\circ\text{ F} / 70^\circ\text{ F}$ está basado en una escala de intervalos. Ésta es la diferencia más importante entre los datos de intervalos y los ordinales; con los datos ordinales no se puede medir las distancias entre las categorías, mientras que con los datos de intervalos si se puede.

Datos de Razón

La escala de razón consiste en medidas numéricas para las cuales la distancia entre los números tiene un tamaño constante y conocido, y donde la razón entre los números tiene algún significado, además, **existe un punto cero, no arbitrario**. Los datos medidos con una escala de razón constituye el nivel más alto de medida.

Ejemplo: La vida útil del cinescopio de un televisor. La diferencia entre 500 y 250 días es una diferencia medible. Además, puede decirse que un cinescopio de 500 días duró el doble que uno de 250 días. También decir que un cinescopio duró 0 días significa que no tuvo vida útil.

VARIABLES

Una variable, es un fenómeno, objeto o relación que puede tomar un valor cualquiera de un conjunto determinando de ellos.

Ejemplo: Estatura de las personas, edad de los niños, el Precio y la demanda de los producto, característica de un producto, etc.

CLASIFICACIÓN DE VARIABLES SEGÚN LA ESCALA DE MEDICIÓN

(Clasificación de Stevens 1951)

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

a) VARIABLES NOMINALES.

Son aquellas variables que establecen la distinción de los elementos en diversas categorías, sin implicar algún orden entre ellas; distribuye a la unidad de análisis en dos o más categorías.

Ejemplo: sexo, estado civil, deportes que practica, profesiones, lugar de nacimiento, etc.

b) VARIABLES ORDINALES.

Aquellas variables que implican orden entre sus categorías, pero no grados de distancia iguales entre ellas; están referidas a un orden o jerarquía, donde las categorías expresan una posición de orden.

Ejemplo: grado de instrucción, clases sociales, grado de simpatía, rango de agresividad, orden de mérito, etc.

Estas dos primeras son las llamadas también variables de los tipos cualitativos o categóricos

c) VARIABLES DE INTERVALO.

Son aquellas que suponen a la vez orden y grados de distancia iguales entre las diversas categorías, pero no tienen un origen natural sino convencional.

Ejemplo: coeficiente de inteligencia, temperatura, puntuación obtenida en una escala, etc.

d) VARIABLE DE RAZÓN.

Estas variables comprenden a la vez a todos los casos anteriores, distinción, orden, distancia y origen único natural; el valor se expresa con un número real.

Ejemplo: edad, peso, ingresos, número de hijos, producción, accidentes de tránsito, etc.

Estas dos últimas son llamadas también cuantitativas, métricas y pueden ser discretas o continuas

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

TIPOS DE VARIABLES

Los tipos de variables pueden ser dependientes, independientes o covariables.

Formas de Resumen de Datos

Distribuciones de Frecuencia Simple

En general cuando la variable en estudio es categórica o toma sólo unos pocos valores, se puede utilizar una tabla de frecuencia simple.

<i>Estado</i>	<i>Frecuencia</i>
<i>Civil</i>	
Casado	25
Soltero	22
Viudo	17
Otros	6
Total	60

<i>Variable</i>	<i>Frecuencia</i>
1	5
2	6
3	2
4	2
Total	15

Hay 25 individuos casados, 22 solteros,
 Hay 5 observaciones del valor 1, 6 del valor
 17 viudos y 6 en la categoría otros.
 2, 2 observaciones del valor 3 y 2 del valor 4.

Distribuciones de Frecuencia para datos Agrupados

Cuando la cantidad de datos es muy grande, conviene en vez de resumirlos directamente, agruparlos primeramente en “clases” y observar la frecuencia en cada clase.

Pasos para construir una distribución o Tabla de Frecuencias.

1. Determinar el número de clases.

Para hacer esto, puede decidir directamente el investigador la cantidad de clases que considera necesario ó si no se tiene ninguna idea de cuantas clases serían necesarias, se puede recurrir a la fórmula de Sturges:

Sturges:

$K = 1 + 3.322 \cdot \log_{10}(n)$, donde K es el número estimado de clases cuando se tiene “n” datos.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

2. Determinar el tamaño de cada clase.

Para ello se averigua la diferencia entre el valor más grande en el conjunto de datos y el más pequeño (Rango), y se divide entre el número de clases que se quiere. El tamaño de clase no necesariamente debe ser igual para todos, eso depende del investigador.

3. Determinar el punto inicial de la primera clase.

Normalmente se comienza del menor valor de la serie de datos. Por ejemplo, si el menor valor es 12 y el tamaño del intervalo es 5, la primera clase podría ser:

12 – 16, la siguiente sería 17 – 21 y así sucesivamente.

También podría empezarse de un valor arbitrario menor al mínimo (12), para tener una mejor apariencia. Es decir, podría comenzarse desde el valor 10 que es menor que 12, y las clases serían: 10 – 14, 15 – 19, 20 – 24, etc.

Obs: a-) Se puede observar que el tamaño 5, indica que deben haber 5 números que abarque la clase, esto es, de 10 a 14 hay exactamente 5 números incluyendo los extremos.

b-) Se debe cubrir todos los datos; no se pueden crear clases y dejar libre valores, es decir, si el mayor valor entre los datos es 50, se tienen que crear clases hasta cubrirlo. No importa si se supera este valor, pero nunca se tiene que quedar por debajo, esto es, puede tenerse intervalos de la forma 46 – 50, ó 48 – 52, como últimos intervalos pero no uno de la forma 45 – 49, pues éste aún no cubre al 50.

c-) Los límites deben estar bien establecidos, no deben haber ambigüedades, como que aparezca un mismo número en dos clases diferentes.

Ejemplo:

5 – 10

10 – 15

15 – 20

20 y más

Este tipo de intervalos no permite distinguir si por ejemplo, el valor 10 pertenece a la clase 1 ó 2.

4. Contar el número de valores que ocurre en cada clase.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Nota: Estos pasos deben considerarse sólo como normas empíricas (prácticas) y no como un proceso riguroso para construir una distribución de frecuencias.

Algunos conceptos a manejar:

➤ **Límites Reales de Clases (LRC):** Se obtiene sumando el límite más alto de una clase y el más bajo de la clase siguiente dividido entre dos.

Ejemplo:

16 – 20	$LRC = (20 + 21)/2 = 20,5$	Este
		valor es el límite real superior
21 – 25		de la clase
1 y a la vez el límite real		
26 – 30		inferior de
la clase 2.		

➤ **Tamaño o anchura de una clase:** Es la diferencia entre los límites reales de clases que los forman. Si todos los intervalos de clases tienen igual anchura esta anchura común lo representamos por la letra C y está definida $C = LRS - LRI$, donde LRS es el límite real superior y LRI es el límite real inferior.

Ejemplo: $Tc = (25,5 - 20,5) = 5$ es el tamaño de la clase 2 del ejemplo anterior.

➤ **Marca de clase o punto medio de la clase (X_m):** Se obtiene sumando los límites inferiores y superiores de la clase dividiendo entre dos.

Ejemplo: $X_m = (20,5 + 25,5)/2 = 23$ es la marca de clase de la clase 2 del ejemplo.

➤ **Frecuencias:** Es la cantidad de casos que cae dentro de cada clase.

➤ **Frecuencias relativas:** Son porcentajes que se calculan dividiendo la frecuencia real de cada clase entre el número total de observaciones que se clasifican.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

➤ **Frecuencias acumuladas:** Muestra el número total de ocurrencias que son menores o mayores que ciertos valores claves.

Ejemplo:

<i>Edad (años)</i>	<i>Frecuenci a</i>	<i>Frec. (%)</i>	<i>Relativa</i>	<i>Frec. Acumulada</i>	<i>X_m</i>
1 - 5	5	10		5	3
6 - 10	10	20		15	8
11 - 15	7	14		22	13
16 - 20	15	30		37	18
21 - 25	13	26		50	23
Total	50	100			

Clases

Marca de Clase

Gráficos:

Otra forma de resumir datos es mediante el uso de gráficos. Esta es quizás una de las formas más utilizadas para la presentación de resultados descriptivos, pues en general es mucho más fácil interpretar un gráfico donde se notan tendencias, que tener que interpretar un informe escrito o una tabla.

Algunos tipos de gráficos son los siguientes:

Gráficas de barras:

En las gráficas de barras, las alturas de los rectángulos o barras representan las frecuencias de la clase como un histograma, pero no hay motivo para tener una escala horizontal continua (no es necesario que las barras estén pegadas unas a otras). Cada barra representa la frecuencia de una categoría. En general, las barras se ponen en posición vertical con la base en el eje horizontal de la gráfica. Con frecuencia, los diagramas de barras se usan para comparar los valores de una variable.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

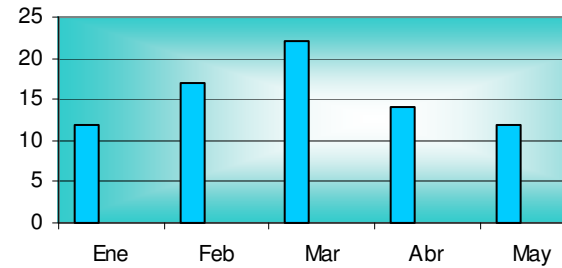
Ejemplos:

a) Simple

Tabla 1 Gastos Mensuales (\$) mensuales (\$)

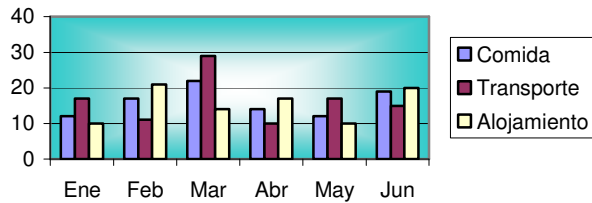
Meses	Comida	Transporte	Alojamiento
Ene	12	17	10
Feb	17	11	21
Mar	22	29	14
Abr	14	10	17
May	12	17	10
Jun	19	15	20

Grafico 1 Gastos mensuales (\$)



b) Compuestos

Tabla 2 Gastos mensuales total (\$) **Grafico 2** Gastos mensuales total (\$)



Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

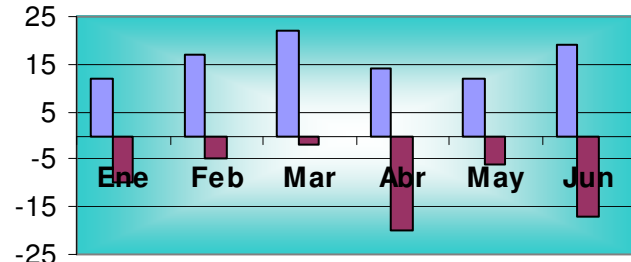
MSc. Edil Zaracho

c) Bidireccionales

Tabla 3 Temperatura inicial y final (°)

Gráfico 3 Temperatura inicial y final (°)

Meses	Temperatura 1	Temperatura 2
Ene	12	-10
Feb	17	-5
Mar	22	-2
Abr	14	-20
May	12	-6
Jun	19	-17



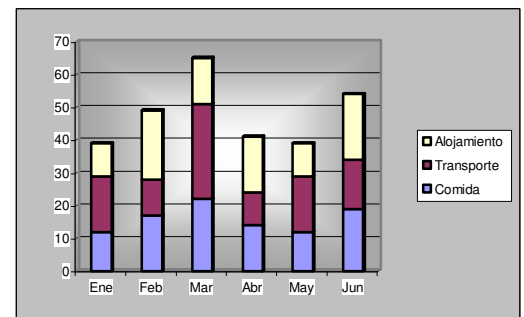
d) Partes Compuestas

Tabla 4 Gastos mensuales total (\$)

Gastos mensuales total (\$)

Meses	Comida	Transporte	Alojamiento
Ene	12	17	10
Feb	17	11	21
Mar	22	29	14
Abr	14	10	17
May	12	17	10
Jun	19	15	20

Gráfico 4



Histogramas:

Los Histogramas se elaboran representando las medidas u observaciones agrupadas en una escala horizontal y las frecuencias de clases en una escala vertical y trazando rectángulos cuyas bases equivalgan a los intervalos de clases y cuyas alturas correspondan a las frecuencias de clases. Un histograma se parece a un diagrama de barra, sólo que no hay espacios entre las barras.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

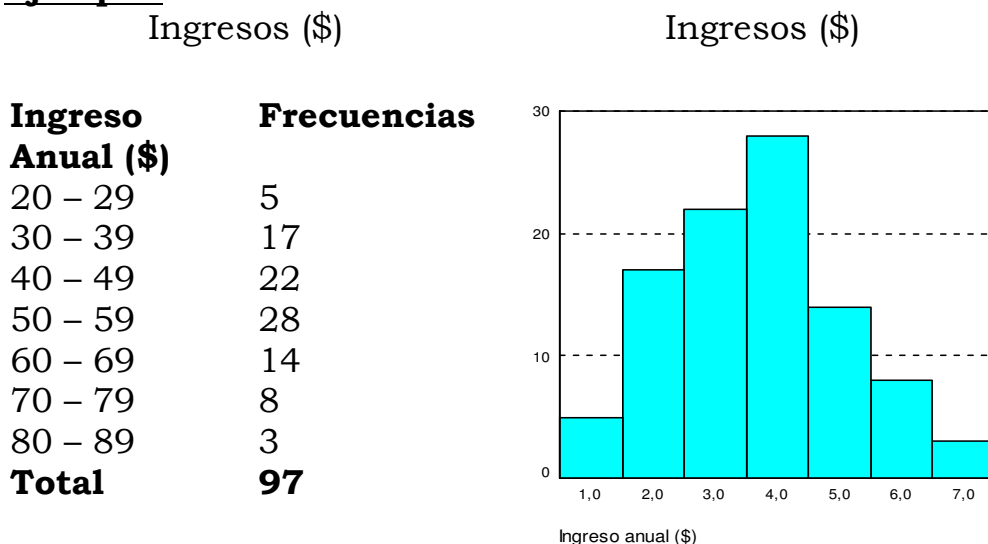
Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Esta es la razón por la que el histograma se usa con frecuencia para datos con escala de intervalo o de razón: las barras adyacentes indican que se está resumiendo un intervalo numérico que muestra las frecuencias de clases elegidas arbitrariamente.

Ejemplo: Se quiere presentar los ingresos de los ejecutivos en un diagrama o gráfica. Se elige el histograma como un método efectivo. Las siete categorías de ingreso aparecen en el eje horizontal, mientras que las frecuencias se ven como barras verticales.

Ejemplo:



Polígonos de Frecuencias:

Las frecuencias de clases están trazadas en las marcas de clase y los puntos sucesivos están unidos con líneas rectas. Es otro método usual de presentar gráficamente datos con escalas de intervalos o de razón. Para construir el polígono de frecuencias se marcan las frecuencias sobre el eje vertical y los valores de la variable que se está midiendo sobre el eje horizontal, como con el histograma. Después se presenta la frecuencia de cada clase dibujando un punto sobre el punto medio de la clase y se conectan los puntos sucesivos con líneas rectas para formar un polígono. En los extremos de la escala horizontal se agregan dos nuevas clases con frecuencia cero. Esto permite que el polígono llegue al eje horizontal en los extremos de la escala horizontal.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

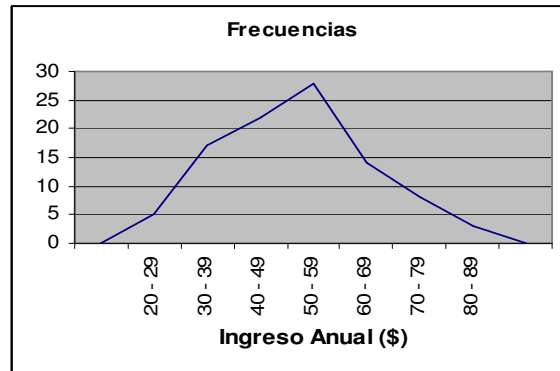
MSc. Edil Zaracho

Ejemplo:

Ingresos (\$)

Ingreso Anual (\$)	Frecuencias
20 - 29	5
30 - 39	17
40 - 49	22
50 - 59	28
60 - 69	14
70 - 79	8
80 - 89	3
Total	97

Ingresos (\$)



Ojiva:

La gráfica de una distribución de frecuencias acumuladas se llama ojiva y se usa para determinar cuántas observaciones hay mayores o menores que un valor determinado en una distribución. Una ojiva “menor que” indica cuántos elementos de la distribución tienen un valor menor que el límite superior de cada clase. Primero se construye una distribución de frecuencias acumuladas. Después se presentan esas frecuencias acumuladas en el límite superior de cada categoría. Por último, se conectan los puntos con líneas rectas para formar la curva ojiva. También se puede construir una ojiva menor que para una distribución de frecuencias relativas. La única diferencia está en la escala del eje vertical. Para la distribución de frecuencias relativas esta escala será de 0 a 100% para indicar la fracción del total de observaciones que caen dentro o por debajo de cada clase.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

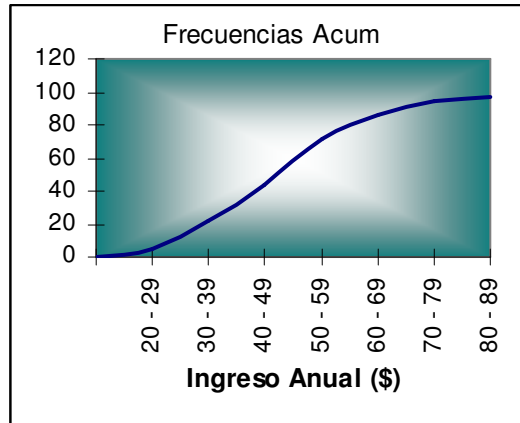
MSc. Edil Zaracho

Ejemplo:

Ingresos (\$)

Ingreso Anual (\$)	Frec	Acum
20 - 29	5	
30 - 39	22	
40 - 49	44	
50 - 59	72	
60 - 69	86	
70 - 79	94	
80 - 89	97	

Ingresos (\$)



A pesar de que es atractivo visual los histogramas, gráficos de barras, polígonos de frecuencias y ojivas es un claro avance sobre las tablas simples. Hay varias maneras de presentar las distribuciones de un modo más dramático y a menudo con mayor efectividad **“Pictogramas”**

A menudo, las distribuciones categorías(o cualitativas) se representan gráficamente como

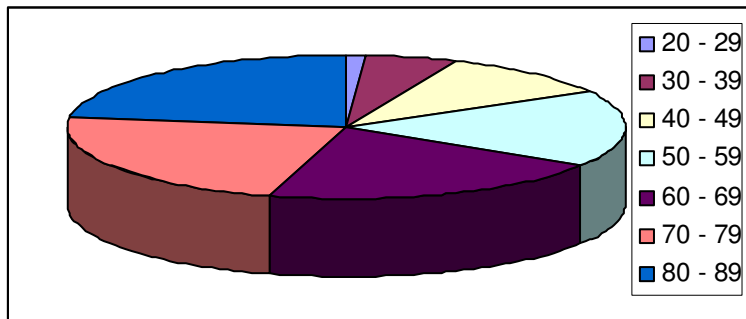
Gráficos Circulares, donde se divide un círculo en secciones (partes en forma de segmento) que son proporcionales en tamaño con las frecuencias o los porcentajes correspondientes. Para elaborar una grafica circular, primero convertimos la distribución en una distribución porcentual, ya que un círculo completo corresponde a 360°, obtenemos los ángulos centrales de varias secciones multiplicando los porcentajes por 3,6. Es una forma efectiva de desplegar los porcentajes en que se dividen los datos. Este tipo de diagrama es particularmente útil si se quiere hacer hincapié en los tamaños relativos de las componentes de los datos. Los presupuestos y la información económica se describen con frecuencia mediante un diagrama de pastel.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



Ejemplo: Ingresos (\$) – Tabla anterior



Medidas de Resumen de datos

Medidas de Tendencia Central

La medida más popular de la tendencia central es la media aritmética o solamente una media.

Media aritmética o media: es una medida descriptiva que se calcula sumando los valores numéricos y dividiendo entre el número de valores. El símbolo que se usa para la media poblacional es la letra griega μ , y el símbolo para la media de la muestra es \bar{x} (x barra).

Con frecuencia las medidas de un conjunto de datos se representan por: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; donde x_1 es la primera medida en el conjunto de datos, x_2 es la segunda medida y así sucesivamente hasta x_n . Para cuatro medidas, 3, 6, 4, y 9, el conjunto de datos es: $x_1=3; x_2=6; x_3=4; x_n=9$ y la media aritmética

En la mayoría de los estudios estadísticos, hay dos conjuntos de datos deferentes que son de interés: la población y la muestra.

La fórmula para calcular la media de una población

Datos Simples

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

donde μ = media poblacional

N es la cantidad de datos poblacionales



La fórmula para calcular la media de una muestra

Datos Simples

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N}$$

donde \bar{x} = media muestral

Para Datos Agrupados

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j x_j}{\sum_{j=1}^K f_j}$$

Nota:

- $\sum x$ = suma de todos los valores de los datos de la población.
- n = tamaño de la muestra

Características de la media aritmética

- Todo conjunto de datos medido en una escala de intervalos o de razón tiene una media.
- La media tiene propiedades matemáticas valiosas que hacen que sea conveniente en otros calculas.
- La media es sensible a valores extremos.
- La suma de las desviaciones de la media de los números es el conjunto de datos es cero: $\sum (x - \mu) = 0$ y $\sum (x - \bar{x}) = 0$
- La suma de los cuadrados de las desviaciones de la media de los números es el conjunto de datos es un valor mínimo $\sum (x - \bar{x})^2$ es un valor mínimo.

Ventajas y Desventajas de la Media

- La ventaja de la media aritmética es que su cálculo es sencillo, resulta fácil de entender y es un buen valor central que se usa para resumir los conjuntos de datos, independientemente del número de valores que tengan.
- La desventaja de la media es que los valores extremos las distorsionan.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

- Está es la razón por la cual la media no es el mejor estadístico descriptivo para resumir todos los conjuntos de datos.

Ejemplo:

Media Ponderada.

Cuando calculamos un promedio, podemos estar cometiendo un grave error si contemplamos el hecho de que no todas las cantidades tienen la misma importancia en relación con el fenómeno que se describe.

Para dar cantidades de las que se promedia su grado de importancia pertinente, es necesario asignarles pesos o valores relativos (importancia relativa) y luego calcular una media

ponderado. En gral. la media ponderada, \bar{x}_w de un conjunto de números, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ cuya importancia relativa se expresa numéricamente por medio de un conjunto de números correspondientes, w, w, w, \dots, w , se obtiene mediante la fórmula:

$$\bar{x}_w = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 + \dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n} = \sum \frac{W_i X_i}{W_i}$$

La Mediana

Para evitar la posibilidad de dejarse llevar por valores muy bajos o muy altos, en ocasiones describimos el “punto medio” o “centro” de un conjunto de datos con medidas estadísticas diferentes de la media. Una de éstas, la mediana de n valores, requiere que se acomoden los datos de acuerdo con su tamaño (Aproximadamente la mitad de los valores de los valores de los datos en conjunto son menores que la mediana y aproximadamente la mitad son mayores) y se define como sigue:

La mediana de un conjunto de datos es el elemento central de un conjunto de observaciones dispuestas en orden de magnitud.

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



Características de la Mediana

- * Todo conjunto de datos a nivel ordinal, nivel de intervalo o nivel de razón tiene una mediana.
- * La mediana no es sensible a los valores extremos.
- * La mediana no tiene ciertas propiedades matemáticas valiosas para poderla usar en otros cálculos.

Posición de la Mediana:

La Mediana es el valor del $n + 1$ ésimo artículo. Cuando n es non (impar); $n+1$ es un entero y da la posición a la mediana; cuando n es par $n+1$ es el punto medio entre dos enteros y la mediana es la media de LODE valores de los artículos correspondientes

Para datos Agrupados

$$\text{Med} = L_i + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\sum f)_i}{f_{\text{mediana}}} \right) \cdot c$$

L_i = frontera inferior de la clase de la Mediana

N = número de datos (frecuencia total)

$(\sum f)_i$ = suma de frecuencias de las clases inferiores a la de la mediana.

F_{mediana} = frecuencia de la clase de la mediana

c = anchura del intervalo de clase de la mediana

La Moda:

Otra medida que en ocasiones se usa para describir el “punto medio” o “centro” de un conjunto de datos es la moda, que se define simplemente como el valor que ocurre con la mayor frecuencia y más de una vez.

Sus dos ventajas principales son que no requiere de cálculos, sólo de conteo y que se puede determinar al igual para datos cualitativos que para datos nominales.

Su desventaja es que se comporta erráticamente cuando se redondean los valores de los datos nominales.



Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Características de la Moda

- ❖ Algunos conjuntos de datos no tienen una moda:
- ❖ Algunos conjuntos de datos tienen más de una moda
- ❖ La moda no tiene ciertas propiedades matemáticas valiosas para usarla en otros cálculos.

Para datos agrupados

$$\text{Moda} = L_i + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \cdot C$$

L_1 : frontera inferior de la clase modal (clase que contiene a la moda)

Δ_1 : exceso de la frecuencia modal sobre la clase inferior inmediata.

Δ_2 : exceso de la frecuencia modal sobre la clase superior inmediata

c : anchura del intervalo de clase modal.

Una comparación de la media, la mediana y la moda

	Promedio Ventajas	Desventajas
Media	Refleja el valor de cada dato Es sencillo calcularla y entenderla Tiene propiedades matemáticas valiosas; es útil para otros cálculos.	Los valores extremos influyen indebidamente.
Mediana	Los valores extremos no la distorsionan	Carece de ciertas propiedades matemáticas.
Moda	Valor que aparece con más frecuencias.	Carece de ciertas propiedades matemáticas. Algunos conjuntos de datos no tienen moda.

Muchas veces los analistas se preocupan por el modo en que se distribuyen los valores de los datos. La diferencia entre la media, la mediana y la moda se pueden apreciar en las gráficas de las distribuciones simétrica y sesgada

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

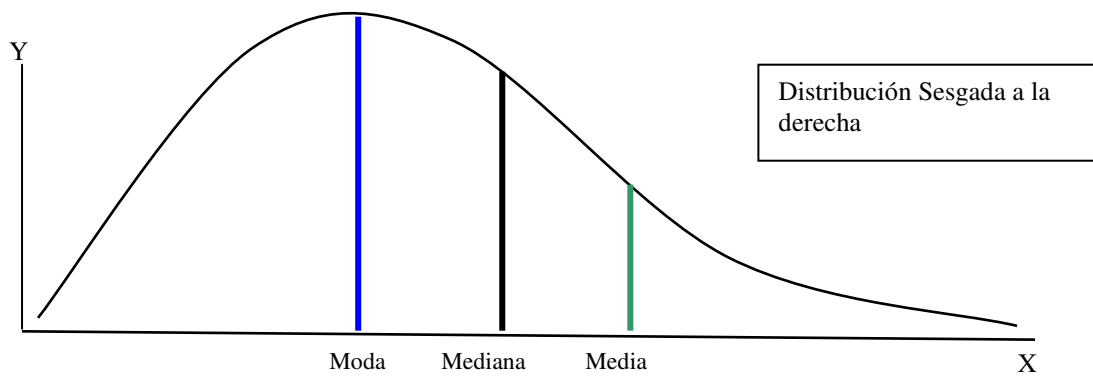
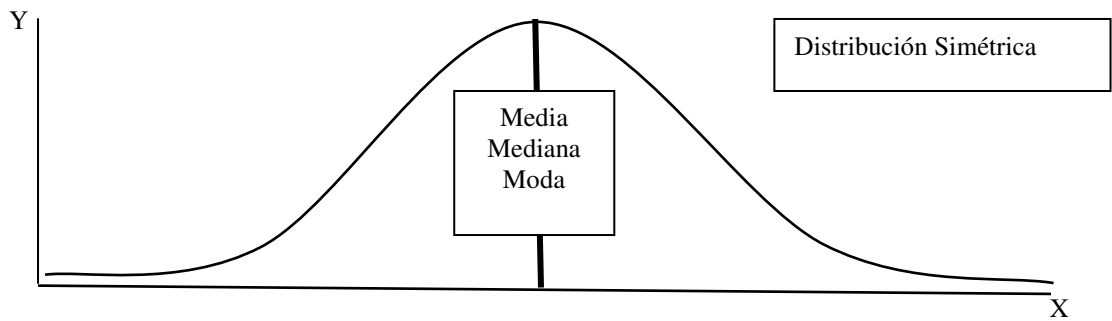


UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

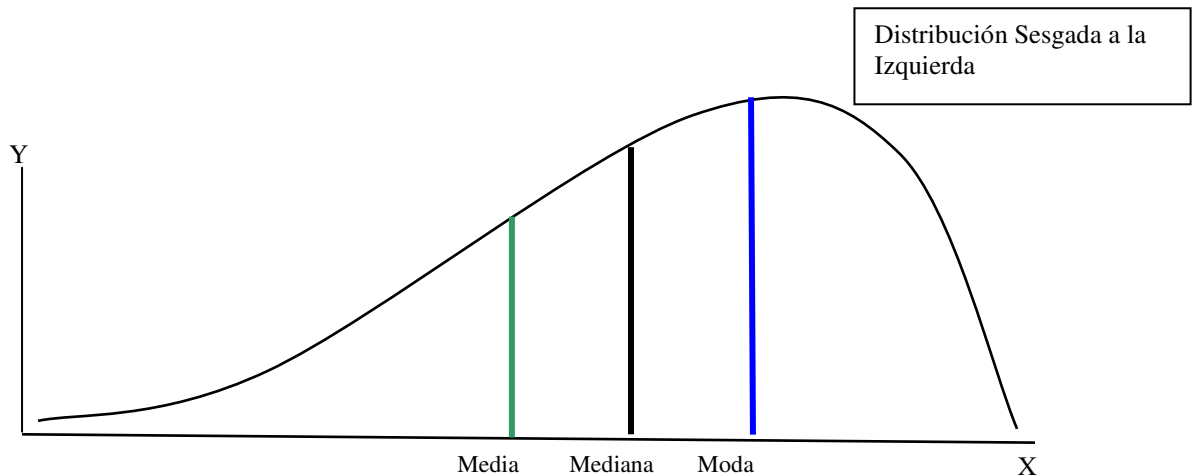
MSc. Edil Zaracho

Figura:



Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho



La figura muestra tres curvas: una simétrica (curva a) y dos sesgadas (curvas b y c). La curva describe una distribución simétrica, ya que se dibuja una línea desde el punto más alto de la curva al eje horizontal, el área de la curva queda dividida en dos partes iguales y simétricas. Observe que la media, mediana y moda están todas localizadas en el valor pico de la curva a.

Las curvas b y c, se denominan curvas sesgadas porque no tienen simetría. Los valores en este tipo de distribuciones se concentran hacia el extremo izquierdo o en el extremo derecho de la escala a lo largo del eje horizontal. La curva b está sesgada a la derecha (algunas veces se dice que estas distribuciones están sesgadas positivamente). La media se aleja desde el pico de la curva hacia el sesgo. Esto se debe a que la media es sensible a unos cuantos valores extremos al final de la curva.

La moda es el valor de x que corresponde al valor más alto de la curva, y la mediana se localiza entre la media y la moda.

Cuando la distribución está sesgada a la izquierda (curva), la media se separa del punto más alto de la curva hacia el extremo izquierdo de la escala. La mediana se corre hacia abajo y la moda permanece en el punto más alto de la curva.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho

Bibliografía

Freund John E.

Gary A. Simon

Estadística Elemental

Hanke John E.

Reitsch Arthur G.

Estadística para Negocios

Walpole E. Ronald

Myers H. Raymond

Myers L. Sharon

Año: 1998

Probabilidad y Estadística para Ingenieros

Spiegel Murria R.

Estadística

Lic. Liz González

MSc. Edil Zaracho