



## **CÁLCULO Y ECUACIONES DIFERENCIALES II**

CARRERA: LICENCIATURA EN BIOTECNOLOGÍA

### **I. IDENTIFICACIÓN**

1. Código	: 57M
2. Horas Semanales de Clase	: 6
2.1. Teóricas	: 3
2.2. Prácticas	: 3
3. Crédito	: 4
4. Pre-Requisito	: Cálculo y Ecuaciones Diferenciales I

### **II. JUSTIFICACIÓN**

El Cálculo y Ecuaciones Diferenciales, como disciplina teórico práctica enfocada al conocimiento de las relaciones funcionales entre las variables involucradas en los procesos dinámicos que se presentan en las ciencias bioquímicas, constituye una parte importante del análisis matemático, que la hace imprescindible su inclusión en los estudios de Biotecnología.

La derivada y la integral, como objetos de estudio de la asignatura, son indispensables para la solución de problemas que se presentan en todas las ciencias exactas y naturales, pues permiten estudiar y resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, las ordinarias planares, que se presentan de forma natural en el estudio de fenómenos biológicos. Además, el estudio de conceptos como la definición formal de límite sirve como introducción al pensamiento científico, el cual constituye el núcleo de los estudios biotecnológicos en general, como lo es en los demás campos de las ciencias.

### **III. OBJETIVOS GENERALES**

1. Resolver problemas de minimización de varias variables.
2. Resolver ecuaciones diferenciales que involucran varias variables.

### **IV. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**



1. Reconocer la importancia de las funciones de varias variables en la matemática aplicada.
2. Determinar límites de funciones de varias variables.
3. Determinar el gradiente de una función de varias variables.
4. Determinar integrales de camino.
5. Determinar integrales múltiples.
6. Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.
7. Utilizar ecuaciones diferenciales para modelizar problemas biológicos.

## **V. METAS PEDAGÓGICAS**

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Funciones de varias variables”, el estudiante será capaz de:**

1. Determinar dominio y rango de una función de varias variables.
2. Determinar las líneas y superficies de nivel de una función de varias variables.
3. Graficar las líneas y superficies de nivel utilizando programas informáticos.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Noción de límite”, el estudiante será capaz de:**

- a) Comprender la definición formal de límite de funciones de varias variables.
- b) Deducir las propiedades de los límites de funciones de varias variables.
- c) Determinar límites direccionales e iterados.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Continuidad”, el estudiante será capaz de:**

- a) Aplicar la teoría de límites a las funciones continuas de varias variables.
- b) Distinguir funciones continuas de funciones discontinuas.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Diferenciación”, el estudiante será capaz de:**

- a) Determinar las derivadas parciales de una función de varias variables.
- b) Distinguir funciones diferenciables de funciones no diferenciables.



- c) Determinar el gradiente de una función de varias variables.
- d) Resolver problemas de minimización que involucran varias variables.
- e) Utilizar la teoría de diferenciales en problemas de aplicación.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Integración”, el estudiante será capaz de:**

- a) Determinar integrales de línea.
- b) Distinguir integrales de línea dependientes del camino de independientes del camino.
- c) Determinar integrales múltiples.
- d) Utilizar la teoría de integrales en problemas de aplicación.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, el estudiante será capaz de:**

- a) Resolver Ecuaciones Diferenciales Exactas.
- b) Determinar factores integrantes para una Ecuación Diferencial.
- c) Resolver Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Grado Superior.
- d) Utilizar ecuaciones diferenciales ordinarias para modelizar problemas biológicos.

**Al finalizar el estudio y la práctica de la unidad “Ecuaciones Diferenciales Parciales”, el estudiante será capaz de:**

- a) Distinguir Ecuaciones Diferenciales Parciales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- b) Resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales de primer orden.
- c) Resolver Ecuaciones Diferenciales Parciales de orden superior.
- d) Utilizar ecuaciones diferenciales parciales para modelizar problemas biológicos.

## **VI. CONTENIDOS**

### **A. UNIDADES PROGRAMÁTICAS**

1. Funciones de varias variables
2. Noción de límite
3. Continuidad



4. Diferenciación
5. Integración
6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
7. Ecuaciones Diferenciales Parciales

## **B. DESARROLLO DE LAS UNIDADES PROGRAMÁTICAS**

### **1. Funciones de varias variables.**

- 1.1. Definición.
- 1.2. Dominio.
- 1.3. Entorno.
- 1.4. Rango.
- 1.5. Líneas y superficies de nivel.
- 1.6. Representación gráfica.

### **2. Noción de límite.**

- 2.1. Definición intuitiva.
- 2.2. Definición formal.
- 2.3. Límites direccionales y límites iterados.
- 2.4. Propiedades.

### **3. Continuidad.**

- 3.1. Definición.
- 3.2. Propiedades.

### **4. Diferenciación.**

- 4.1. Definición de diferencial.
- 4.2. Interpretación geométrica.
- 4.3. Derivadas direccionales.
- 4.4. Derivadas parciales.
- 4.5. Condición suficiente de diferenciabilidad.
- 4.6. Derivadas parciales de orden superior.
- 4.7. La regla de la cadena para funciones de varias variables.
- 4.8. Funciones implícitas.
- 4.9. Gradiente.
- 4.10. Definición de extremo relativo de una función de varias variables.
- 4.11. Definición de punto crítico.
- 4.12. Criterio de las derivadas parciales segundas.
- 4.13. Método de los multiplicadores de Lagrange.
- 4.14. Aplicaciones.



## **5. Integración.**

### 5.1. Integrales de línea.

- 5.1.1. Caminos e integrales de línea.
- 5.1.2. Propiedades.
- 5.1.3. Integrales de línea con respecto a la longitud de arco.
- 5.1.4. Dependencia del camino.
- 5.1.5. Teorema Fundamental del Cálculo.
- 5.1.6. Aplicaciones.

### 5.2. Integrales dobles.

- 5.2.1. Particiones de rectángulos e integrales dobles.
- 5.2.2. Propiedades.
- 5.2.3. Integral doble como integral reiterada.
- 5.2.4. Extensión a regiones no rectangulares.
- 5.2.5. Teorema de Green.
- 5.2.6. Cambio de variables.
- 5.2.7. Extensión a integrales múltiples en general.
- 5.2.8. Aplicaciones.

## **6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.**

### 6.1. Ecuaciones Diferenciales Exactas.

- 6.1.1. Definición.
- 6.1.2. Resolución.
- 6.1.3. Factores integrantes.

### 6.2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y Grado Superior.

- 6.2.1. Ecuaciones resolubles para  $p$
- 6.2.2. Ecuaciones resolubles para  $x$
- 6.2.3. Ecuaciones resolubles para  $y$

## **7. Ecuaciones Diferenciales Parciales.**

### 7.1. Definición de Ecuación Diferencial Parcial.

### 7.2. Eliminación de constantes arbitrarias.

### 7.3. Eliminación de funciones arbitrarias.

### 7.4. Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden.

- 7.4.1. Ecuaciones lineales.
- 7.4.2. Ecuaciones no lineales.
- 7.4.3. Método de Charpit.

### 7.5. Ecuaciones Diferenciales Parciales de Orden Superior.

- 7.5.1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.



- 7.5.2. Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.
- 7.5.3. Ecuaciones de segundo orden con coeficientes variables.

## **VII. METODOLOGIA**

En todo proceso pedagógico, existe una fase inicial que parte del reconocimiento del grupo de estudiantes, que se logra mediante la aplicación de un instrumento diagnóstico, que constituye un punto de partida de gran valor, pues permite verificar la solidez de conocimientos que tiene el grupo. Tras esta verificación, es que el profesor toma decisiones fundamentales para el abordaje pedagógico, para garantizar los resultados. Nos obstante en el marco de las tendencias actuales, es vital la consideración de una pedagogía cognitiva, en el que el estudiante asume un rol relevante, no solo respecto al aprendizaje, sino también, a como lo aprendió, hasta donde puede avanzar, o si eventualmente existen otros caminos para llegar a la resolución de un problema y si no existiera, contar con las razones sustanciales sobre tal situación. Para la construcción de este trayecto, se recomienda:

1. Sistematizar la enseñanza, con ayuda de mapas conceptuales, redes, ejemplos, cuadros y otros instrumentos pedagógicos, además de los procedimientos naturales de las matemáticas, que faciliten la conceptualización, además de la fijación de cada modo de proceder desde el punto de vista de las ciencias.
2. Formular preguntas que constituyan medios heurísticos para la búsqueda y el razonamiento matemático.
3. Utilizar la ejemplificación para que el estudiante tenga un punto de partida en la resolución de problemas.
4. Estimular el método reflexivo, métodos metacognitivos y cognitivos, para que de ese modo los estudiantes analicen, comparen, hagan analogías, generalicen, discutan y defiendan sus resultados.
5. Atender, a los estudiantes en forma diferenciada según sus necesidades en su aprendizaje



El profesor, por lo tanto, empleará dinámicas que promuevan el trabajo en equipo, la participación activa de los estudiantes poniendo especial atención en el desarrollo de habilidades de carácter general así como específicas del cálculo diferencial. Es también importante incorporar el uso de recursos computacionales en la actividad cotidiana e incentivar el desarrollo regular las tareas inherentes a la disciplina. Desde estas consideraciones puntuales se mencionan,

- Exposición oral
- Trabajo individual y/o grupal
- Revisión o consulta bibliográfica
- Todas las actividades formativas estarán además complementadas con soporte a través de herramientas Web como la herramienta de Aula Virtual

## **VIII. ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE**

En los procesos del abordaje pedagógico, se podrá recurrir a la presentación magistral, promoviendo siempre la participación activa de los estudiantes. Para los procesos de práctica, podrá implementarse en el contexto de un trabajo grupal con no más de tres integrantes en forma individual. En tal sentido, se recomienda:

- a) Presentación en el aula, en clases participativas, de conceptos y procedimientos asociados a los temas.
- b) Realización de ejercicios en forma individual y grupal.
- c) Realización de prácticas de simulación en ordenador, individualmente y en grupo.
- d) Realización de prácticas grupales.
- e) Exposiciones escritas del trabajo práctico y exámenes.
- f) Todas las actividades formativas estarán además complementadas con soporte a través de herramientas Web como la herramienta de Aula Virtual.

## **IX. MEDIOS AUXILIARES**

- Textos, materiales de consulta
- Medios audiovisuales
- Programas informáticos para graficar funciones

## **X. EVALUACIÓN**

La evaluación en términos de promoción se hará en el marco del Reglamento Académico de la FaCEN. No obstante en procesos de



desarrollo, se recomienda una “mirada de proceso”, con carácter formativo. Por lo tanto se deberá recurrir a los diferentes instrumentos evaluativos, similares a los ejercicios de consolidación aplicados en el abordaje pedagógico. En tal sentido, las prácticas de laboratorio (trabajo en equipo). Tareas y talleres de ejercicios, así como la participación en clase, son aspectos o rasgos de desempeño que habrán que considerarse, en términos valorativos que inciden en forma directa. En este contexto se podrá recurrir a los indicadores evaluativos prescrito en el Reglamento Académico y otros que podrán enriquecer el proceso en el marco de la lógica de la asignatura.

## **XI. BIBLIOGRAFÍA**

### **a. BÁSICA**

- APOSTOL T. M. Calculus 2, Cálculo con funciones de varias variables, con una introducción al álgebra lineal. Reverté, 2005.
- HOSTETLER R. P., CAP C. R. L. Cálculo II. Pirámide, 2006.
- JONES D., PLANK M., SLEEMAN B. Differential Equations and Mathematical Biology, Second Edition. 2º ed. Chapman and Hall/CRC, 2009.
- LARSON R. E., HOSTETLER R. P., EDWARDS B. H. Cálculo con geometría analítica. McGraw-Hill, 2006.
- NEUHAUSER C. Calculus for Biology and Medicine (3rd Edition). 3º ed. Prentice Hall, 2010.
- PÉREZ C. F., HERNÁNDEZ F. J. V., MONTANER J. M. V. Cálculo diferencial de varias variables. Thomson, 2002.
- RUAN S., WOLKOWICZ G. S. K., WU J. Differential equations with applications to biology. American Mathematical Society, 1999.

### **COMPLEMENTARIA**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN**  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE BIOLOGÍA

---

PLAN 2011

- SINGH S. Biostatistics And Introductory Calculus. Nirali Prakashan, 2008.
- STEINER E. The chemistry maths book. Oxford University Press, 2008.
- THOMAS G. B. Cálculo: varias variables. Pearson Educación, 2006.
- VARBERG E. Cálculo diferencial e integral. Pearson Educación, 2007.
- ZILL D. G., FRAGOSO F. S. Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado. Thomson International, 2006.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. 1998. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. 4ª. Ed. México, MX: Limusa. 749 p.
- AYRES, F. 1991. Ecuaciones diferenciales. México, MX: Mc Graw. Hill. 296 p.